Аналитичко продужење

деф: Аналитичко продужење функције $f_0 : M \to \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$ је ф-ја f холоморфна на $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $M \subseteq \Omega$ тд. $f|_M = f_0$.

Примери:

① Ако је $f_0(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$, домен је $M = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и на M је f_0 холоморфна.

Тејлоров развој: $f_0(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right)$

$$f_0(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots\right), \text{ за } z \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2(n+1))!}(-1)^n$$

добијени ред конвергира на $\mathbb{C}$
па помоћу њега проширујемо f_0 на $\mathbb{C}$!

$f|_{\mathbb{C}^*} = f_0$, f холоморфна на $\mathbb{C}$

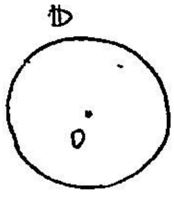
②

Ако је f_0 задато преко степеног реда: $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
Ред конвергира на $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \mathbb{D}$, па је
f_0 холоморфна на $\mathbb{D}$.

Са друге стране, $f_0(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$.

Сада је јасно да је $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ аналитичко продужење ф-је f_0 на $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$\mathbb{D}$

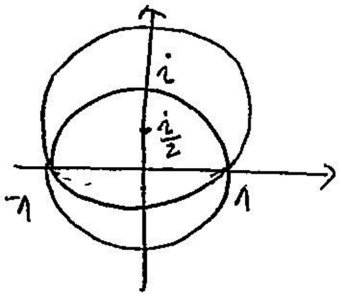


Нека је сада $c \in \mathbb{D}$ произвољна фиксирана.
Можемо развијати f у Тејлоров ред око тачке c
нпр. $c = \frac{i}{2}$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - (z - \frac{i}{2}) - \frac{i}{2}} = \frac{1}{(1-\frac{i}{2})\left(1 - \frac{z-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{i}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^n \quad \text{конв. за } \left|z - \frac{i}{2}\right| < \left|1 - \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2-i)^{n+1}} \cdot \left(z-\frac{i}{2}\right)^n \quad \text{за} \quad \left|z-\frac{i}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$$



f_1 холоморфна на $B_1=\{z\in\mathbb{C} : |z-\frac{i}{2}|<\frac{\sqrt{5}}{2}\}$

f_0 холоморфна на $B_0=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$

деф1. Аналитички елемент је пар $\mathcal{F}=(\Omega,f)$, где је $\Omega\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ област и f холоморфна фја у области Ω

деф2: Два елемента $\mathcal{F}_1=(\Omega_1,f_1)$ и $\mathcal{F}_2=(\Omega_2,f_2)$ су непосредно аналитичко продужење један другог ако је $\Omega_1\cap\Omega_2\neq\emptyset$ и $f_1=f_2$ на некој компоненти $\Omega_1\cap\Omega_2$. Ознака $\mathcal{F}_1\simeq\mathcal{F}_2$.

Из примера 2: (B_0,f_0) и (B_1,f_1) су непосредно аналитичко продужење један другог.

③ Ојлерова гама функција

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt \quad \text{дефинисана за } \operatorname{Re} z>0$$

$$t^{z-1}=e^{\ln t(z-1)}=e^{(x-1)\ln t}\cdot e^{iy\ln t}$$

$$|t^{z-1}|=e^{(x-1)\ln t}=t^{x-1} \quad (t>0)$$

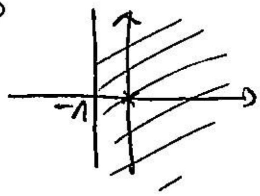
$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}t^{x-1}$, па интеграл апсолутно конвергира за $x>0$ тј. $\operatorname{Re} z>0$

$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \text{ конвергира за } x>0\right)$

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt = \begin{pmatrix} u=e^{-t} & du=-e^{-t}dt \\ dv=t^{z-1}dt & v=\frac{t^z}{z},\ z\neq 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\frac{t^z}{z}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{t^z e^{-t}}{z}\,dt = \frac{1}{z}\cdot\Gamma(z+1)$$

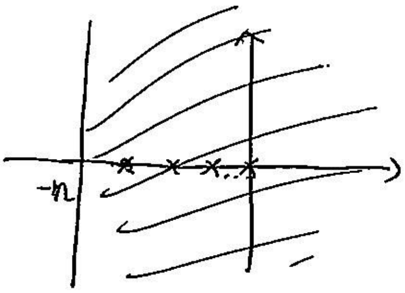
$\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ десна страна је дефинисана са $\mathrm{Re}\, z > -1,\ z \neq 0$
па можемо проширити на основу тога да Γ
буде деф. на $\mathrm{Re}\, z > -1,\ z \neq 0$



Слично, $\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z)$

па $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$ за произвољно $n \in \mathbb{N}$

Поново, десна страна је деф. на $\mathrm{Re}\, z > -n$ и $z \neq 0, z \neq -1, \ldots,$
па можемо проширити $z \neq -n+1$
и деф. за Γ !



Дакле, можемо дефинисати
Γ за произвољно $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{1}{(-n)(1-n)\cdots(-1)}$$

$$= \frac{1}{n!\,(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

(у $-n$ су полови првог реда, лако се провери)

(4) Ако је $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$, онда је домен функције f $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
па је f и холоморфна на $\mathbb{D}$.

Уочимо $z_{m,n} = e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $z_r(m,n) = r \cdot e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}$

$z_r(m,n) \in \mathbb{D}$

$\{z_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ је густ скуп на $\partial\mathbb{D}$, јер је $\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\}$
густ у $[0,1)$ $\left(\frac{\varphi}{2\pi} \in [0,1) \text{ за } \varphi \in [0, 2\pi) \right)$

$$f(z_r(m,n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z_r(m,n)\right)^{2^k}$$

$$z_r(m,n)^{2^k} = \left(e^{2\pi i \frac{m}{2^n}}\right)^{2^k} \cdot r^{2^k} = e^{2\pi i \cdot \frac{m}{2^n} \cdot 2^k} \cdot r^{2^k} = r^{2^k} \text{ за } k \geqslant n$$

па је

$$f(z_r(m,n)) = z_r(m,n)^{2^0} + z_r(m,n)^{2^1} + \ldots + z_r(m,n)^{2^{n-1}} + r^{2^n} + r^{2^{n+1}} + \ldots$$

остатак реда $r^{2n} + r^{2^{n+1}} + \ldots$

тежи ∞ када $r \to 1^-$, па ф-ја f има сингуларитет у тачки $z_{m,n}$ (за све $m,n \in \mathbb{N}$).

$$\left(\lim_{r \to 1^-} f(z_r(m,n)) = \infty\right)$$

Пошто је скуп $\{z_{m,n} : m,n \in \mathbb{N}\}$ густ на кружници $\partial \mathbb{D}$, то се f не може аналитички продужити ни на један скуп $A \supsetneq \mathbb{D}$.

Задаци:

① Одредити аналитичко продужење (и највећу област на коју се може продужити) ф-је $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)z^n$.

полупречник конвергенције: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$, f конвергира на $\mathbb{D}$

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^{n-1} = z F(z)$$

$$\int F(z)dz = \int \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)z^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^n$$

радимо као да је $z \in \mathbb{R}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^n = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+1} = \frac{g(z)}{z}$$

формално би на крају требало развити добијену ф-ју у ТР ради провере

$$\int \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)z^{n+1}dz = \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)\frac{z^{n+2}}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+2} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\int g(z)\,dz = z^3 \cdot \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow g(z) = \left(\frac{z^3}{1-z}\right)' = \frac{3z^2(1-z)+z^3}{(1-z)^2} = \frac{3z^2-2z^3}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow \int F(z)\,dz = \frac{3z-2z^2}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow F(z) = \left(\frac{3z-2z^2}{(1-z)^2}\right)' = \frac{(3-4z)(1-z)^{\cancel{2}} + 2\cancel{(1-z)}(3z-2z^2)}{(1-z)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$F(z) = \frac{(3-4z)(1-z)+2(3z-2z^2)}{(1-z)^3} = \frac{3-4z-3z+\cancel{4z^2}+6z\cancel{-4z^2}}{(1-z)^3}$$

$$F(z) = \frac{3-z}{(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_0(z) = \frac{(3-z)z}{(1-z)^3}} \quad \text{за } z\in\mathbb{D} \qquad \boxed{f(z) = \frac{(3-z)z}{(1-z)^3} \text{ је деф на } \mathbb{C}\setminus\{1\}}$$

$\Rightarrow$ f има само сингуларитет у $z=1$ (пол реда 3)

f је аналитичко продужење ф-је f_0

---

② Одредити аналитичко продужење и област на коју се може продужити функција $f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

полупречник конвергенције $R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$

f је дефинисана и холоморфна на $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$.

(деф. и на граници за $z\neq 1$, $z=e^{i\varphi}$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n}$ конвергира)

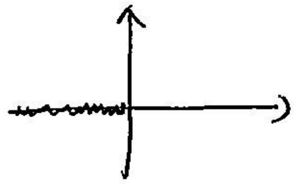
(али нас занима само област где је холоморфна)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{за } z\in\mathbb{R} \text{ би било } f(z) = -\log(1-z)\ !$$

$z\in\mathbb{R}$ тј. $z=x$: $f(x) = -\log(1-x)$, $-1\le x<1$

Грана логаритма: $f(z) = -\mathrm{Log}(1-z) = -\left(\log|1-z| + i\arg(1-z)\right)$

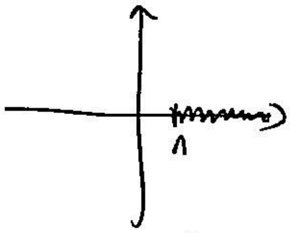
$$\arg(1-z) \in (-\pi, \pi)$$



$$1-z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$$-z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$$



Дакле, f је дефинисана на $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$!

f је холоморфна на $\mathbb{C} \setminus [1,\infty)$!

$f = f_0$ на $\mathbb{D}$ (проверити развојем у Тејлоров ред)

f је аналитичко продужење ф-је f_0

или на основу теореме јединости јер је на $[-1,1)$ $f(x) = f_0(x)$!

Дискусија:

грану логаритма и грану n-тог корена највише можемо продужити до $\mathbb{C} \setminus$ полуправа!

$$\log f(z) = \log|f(z)| + i(\arg f(z) + 2k\pi)$$

$$\arg f(z) \in [0, 2\pi)$$
$$\in (-\pi, \pi)$$

итд.

$$(f(z))^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|f(z)|} \cdot e^{i \frac{1}{n}(\arg f(z) + 2k\pi)}$$