(1) Нека је $B=B(r)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}\setminus[0,r]$, где је $r\in(0,1)$. (Гречов екстремални домен)

и $B'=\{z\in\mathbb{C}: |z|<R\}\setminus[-1,1]$.

а) Ако постоји билинеарно пресликавање које слика B на B', одредити у којој су тада вези r и R и наћи то пресликавање.

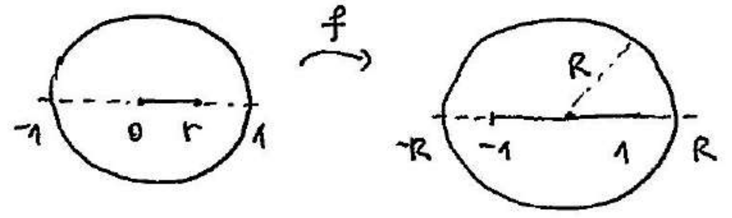
б) Пресликати прстен $P_5=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<5\}$ фјом Жуковског $\Delta(z)=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$.

в) Користећи делове а) и б) показати да је

$$\log\frac{(1+\sqrt{1-r^2})^2}{r}<\mu(r)<\log\frac{4}{r},$$

где је $\mu(r)=M(B(r))$.

а)



* билинеарна пресликавања сликају праве и кружнице на праве и кружнице

f бирамо тако да слика $0\mapsto-1$, $r\mapsto 1$ и јединичну кружницу на кружницу пол. R

Тада се и права која садржи 0 и r слика на праву која садржи -1 и 1, што значи да $-1\mapsto-R$ и $1\mapsto R$.

$0\mapsto-1$
$r\mapsto 1$
$-1\mapsto-R$
$1\mapsto R$

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{f(z)-f(z_1)}{f(z)-f(z_2)}:\frac{f(z_3)-f(z_1)}{f(z_3)-f(z_2)}$$

(билинеарно пр. чува дворазмеру)

Одавде налазимо везу r и R, као и експлицитну формулу за f!

$z_1=0,\ z_2=-1,\ z_3=1$

$f(z_1)=-1,\ f(z_2)=-R,\ f(z_3)=R$

$$\frac{z-0}{z+1}:\frac{1-0}{1+1}=\frac{f(z)+1}{f(z)+R}:\frac{R+1}{R+R}$$

$$\frac{z}{z+1}\cdot 2=\frac{f(z)+1}{f(z)+R}\cdot\frac{2R}{R+1}$$

$$\frac{z}{z+1}\cdot\frac{R+1}{R}=\frac{f(z)+1}{f(z)+R}$$

$$z(R+1)(f(z)+R)=(z+1)R(f(z)+1)$$

$$f(z)\big(zR+z-(zR+R)\big)=zR+R-(zR+z)R$$

$$f(z)\cdot(z-R)=\cancel{zR}+R-zR^2-\cancel{zR}$$

$$\boxed{f(z)=\frac{R(1-Rz)}{z-R}}$$

$$f(r)=1 \Rightarrow \frac{R(1-Rr)}{r-R}=1 \quad (*)$$

$$R-R^2r=r-R$$

$$r(1+R^2)=2R \qquad \boxed{r=\frac{2R}{1+R^2}}$$

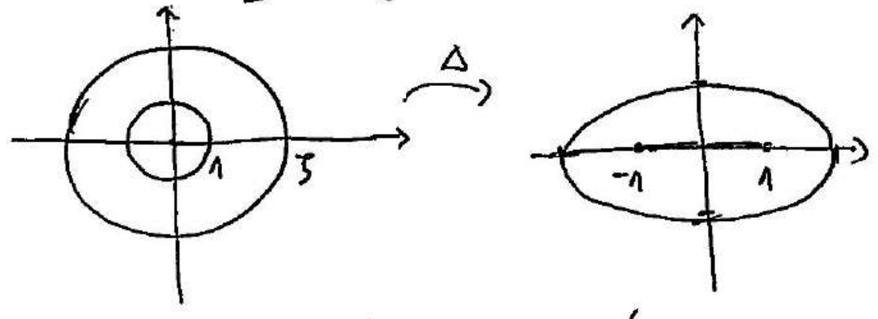
$$R^2\cdot r-2R+r=0 \qquad R_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4r^2}}{2r}=\frac{1\pm\sqrt{1-r^2}}{r}$$

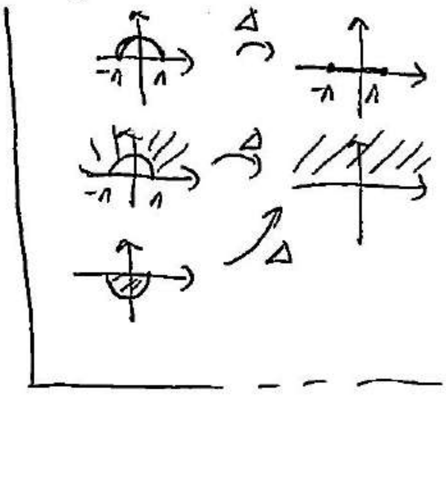
$R>1>r$ па је $1-Rr<0$ (из$(*)$)

тј. $Rr>1 \Rightarrow \boxed{R=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}}$

б) $\Delta(z)=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ фја Жуковског

(подсетите се из КА А)





добија се елипса (са полуосама

$$a=\frac{\zeta+\frac{1}{\zeta}}{2},\ b=\frac{\zeta-\frac{1}{\zeta}}{2}\Big)$$ без $[-1,1]$

Доказ: $z=re^{i\varphi}$, $r\in(1,\zeta)$, φ иде од 0 до 2π

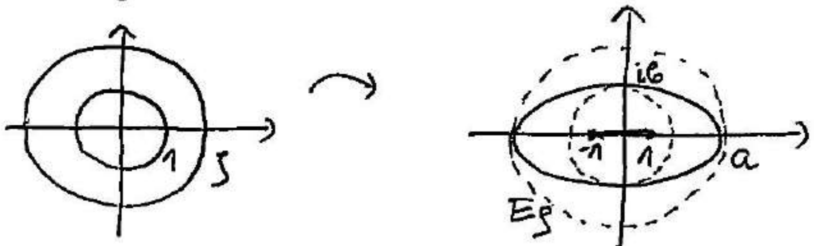
$$\Delta(z)=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right)$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\ b=\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) \qquad E_\zeta=\Delta(P_\zeta$$

б) за $R>a$ је $E_\varsigma \subseteq B'$ па је на основу монотоности модула

$$M(E_\varsigma) \le M(B') = \mu(r)$$
$$\Vert$$
$$\log\varsigma \le \mu(r)$$

за $R<b$ је $E_\varsigma \supseteq B'$ па је $M(E_\varsigma) \ge \mu(r)$ тј. $\log\varsigma \ge \mu(r)$



$a=\frac{1}{2}(\varsigma+\frac{1}{\varsigma})$

$b=\frac{1}{2}(\varsigma-\frac{1}{\varsigma})$

E_ς елипса без $[-1,1]$

Пошто је познато шта треба добити, остаје само да се докаже да је за $\varsigma=\frac{4}{r}$ $R<b$ и за $\varsigma=\frac{(1+\sqrt{1-r^2})^2}{r}$ испуњено $R>a$.

• за $\varsigma=\frac{4}{r}$ је $R<(\varsigma-\frac{1}{\varsigma})\frac{1}{2}$:

$R=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}$, $r=\frac{2R}{R^2+1}$ - познато

$$\varsigma-\frac{1}{\varsigma}=\frac{4}{r}-\frac{r}{4}=\frac{16-r^2}{4r} \underset{?}{>} 2R$$

$$\frac{16-r^2}{4r} > 2\,\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r} \quad /\cdot 4r$$

$$16-r^2 > 8+8\sqrt{1-r^2}$$

$$8 > r^2+8\sqrt{1-r^2}$$

$$8-r^2 > 8\sqrt{1-r^2} \quad /^2$$

$$\cancel{64}-16r^2+r^4 > 64(1-r^2) = \cancel{64}-64r^2$$

$$r^4+48r^2>0 \quad \checkmark$$

• за $\varsigma=\frac{(1+\sqrt{1-r^2})^2}{r}$ је

$$R>(\varsigma+\frac{1}{\varsigma})\frac{1}{2}$$

$$2R>\varsigma+\frac{1}{\varsigma}$$

$$\varsigma = rR^2$$

$$\varsigma+\frac{1}{\varsigma} = rR^2+\frac{1}{rR^2}$$

$$=\frac{2R^3}{R^2+1}+\frac{1}{R^2\cdot\frac{2R}{R^2+1}}$$

$$=\frac{2R^3}{R^2+1}+\frac{R^2+1}{2R^3}=\frac{4R^6+(R^2+1)^2}{2R^3(R^2+1)} \overset{?}{<} 2R$$

$$\cancel{4R^6}+R^4+2R^2+1 < 4R^4(R^2+1)=\cancel{4R^6}+4R^4$$

$$(R^2+1)^2 < (2R^2)^2$$

$1<R^2$, па је ово изнад испуњено!

$z=x+iy$

② Нека је g Канторова функција и $f(x,y) = (x+g(x), y)$ тј. $f(z) = x+g(x)+iy$.

а) Показати да је f хомеоморфизам квадрата $[0,1]\times[0,1]$ на слику (правоугаоник страница 2 и 1).

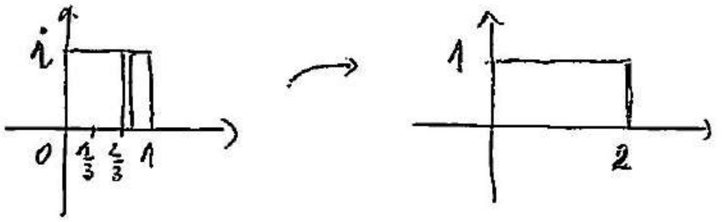
б) Показати да је $f_{\bar z} = 0$ скоро свуда на $[0,1]\times[0,1]$.

в) Доказати да постоје правоугаоници квадрилатерали у домену, чији се модул увећава произвољно (у слици)

г) Доказати да постоји скуп мере 0 који се слика у скуп позитивне мере.

д) Доказати да постоји фамилија кривих модула 0, тако да је модул слике позитиван.

а) и б) домаћи (рађено слично)



$\left\{ \begin{array}{l} \text{по } y \text{ оси остаје исто} \\ \text{по } x \text{ оси се додаје } g \end{array} \right.$

в) $R_\varepsilon = [\frac23, \frac23+\varepsilon]\times[0,1]$ $\quad M(R_\varepsilon)=\varepsilon$ $\qquad g(\frac23)=\frac12$

$f(R_\varepsilon) = [\frac23+g(\frac23), \frac23+\varepsilon+g(\frac23+\varepsilon)]\times[0,1]$

$M(f(R_\varepsilon)) = \varepsilon + g(\frac23+\varepsilon) - g(\frac23)$

Пошто је $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \dfrac{g(\frac23+\varepsilon)-g(\frac23)}{\varepsilon} = \infty$, то не можемо ограничити $M(f(R_\varepsilon))$ са $K\,M(R_\varepsilon)$ ни за једно K!

$\varepsilon + g(\frac23+\varepsilon)-g(\frac23) \le K\varepsilon \quad /:\varepsilon$

$1+\underbrace{\dfrac{g(\frac23+\varepsilon)-g(\frac23)}{\varepsilon}}_{\to\infty} \le K$

Дакле, не важи $M(f(R_\varepsilon)) \le K\,M(R_\varepsilon)$ ни за једно K

Можемо узети $\varepsilon=\frac1n$, $n\ge n_0$ па добити низ правоуг. за које важи тражено.

г) Нека је C Канторов скуп

$$KC = [0,1] \setminus C$$

$m(C) = 0$ линеарна мера

$\boxed{m(C \times [0,1]) = 0}$ дводим мера

$$m(KC \times [0,1]) = 1$$

$m(f(KC \times [0,1])) = m((KC + g(KC)) \times [0,1]) = 1$ јер је

g константна на свакој компоненти од KC

$$m(f([0,1] \times [0,1])) = m([0,2] \times [0,1]) = 2$$

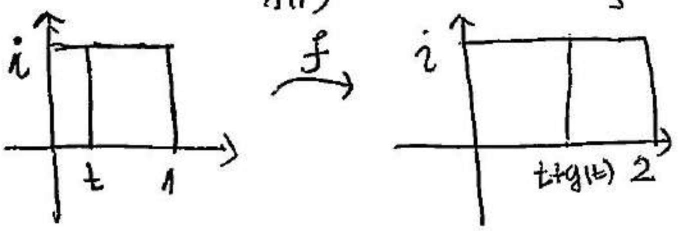
$$\Rightarrow \boxed{m(f(C \times [0,1])) = 1}$$

Дакле, $C \times [0,1]$ је тражени скуп.

д) Γ фамилија кривих

$$L(\Gamma, \rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma)$$

$$M(\Gamma) = \frac{1}{\lambda(\Gamma)} \qquad \lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \qquad A(\rho) = \iint_\Omega \rho^2 d\sigma$$



$$f(x+iy) = x + g(x) + i \cdot y$$

$\varepsilon \in (0,1)$ произвољно

C Канторов скуп, $t \in C$

$$\gamma_t(y) = t + iy, \quad y \in [0,1]$$

Нека је $\rho(z) = \begin{cases} 1, & z \in ([0,\varepsilon] \cup C) \times [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, ρ је допустива (Борел мерљива, ≥ 0, $A(\rho) > 0$)

$$A(\rho) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \rho^2 d\sigma = \varepsilon > 0$$

$$L(\Gamma,\rho) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma_t) \qquad \ell_\rho(\gamma_t) = \int_{\gamma_t} \rho |dz| = 1$$

$$\Gamma = \{\gamma_t : t \in C\}, \quad L(\Gamma,\rho) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow M(\Gamma) \leq \varepsilon$$

Шта се дешава у слици?

$$f(\gamma_t)=\Gamma_t$$

$$f(t+iy)=t+g(t)+iy \ , \quad y\in[0,1]$$

$$f:\underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{\Omega} \longrightarrow \underbrace{[0,2]\times[0,1]}_{\Omega'}$$

$$\lambda(f(\Gamma)) = \sup_{\rho} \frac{L(f(\Gamma),\rho)^2}{A(\rho)}$$

$$L(f(\Gamma),\rho) = \inf_{f(\gamma)\in f(\Gamma)} \int_{f(\gamma)} \rho\,|dz|$$

Нормирано да буде $L(f(\Gamma),\rho)=1$ за све допустиве ρ на Ω'

(као у доказу за $\lambda(\Gamma_1+\Gamma_2)\geq\lambda(\Gamma_1)+\lambda(\Gamma_2)$)

Уколико су све криве ρ-дужине ≥ 1, тј. $\int_{f(\gamma)}\rho|dz|\geq 1$

онда је ρ-површина $A(\rho)=\iint_{\Omega'}\rho^2\,d\sigma \geq m(f(C\times[0,1]))=1$

$$\Rightarrow \qquad \lambda(f(\Gamma))\leq 1$$

$=$ се достиже за нпр. $\rho(z)=\begin{cases}1, & z\in f(C\times[0,1])\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

Тада је $\int_{f(\gamma)}\rho|dz| = \int_0^1 dy = 1$ и

$$A(\rho)=\iint_{f(C\times[0,1])} d\sigma = m(f(C\times[0,1]))=1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(f(\Gamma))=1$$

додатно:

$f(C\times[0,1])\subseteq\Omega'$ $\quad$ $f(C\times[0,1])$ је мере 1 (из б)) $\quad$ $f(C\times[0,1]) = f_1(C)\times[0,1]$

...

$f_1(x)=x+g(x)$

$f(C\times[0,1])$ се састоји из слике Канторов скупа над којим су вертикални праволинијски сегменти

$$\int_0^1\rho^2dy\cdot\int_0^1 dy \geq \Big(\underbrace{\int_0^1\rho\, dy}_{\geq 1}\Big)^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1\rho^2 dy\geq 1$$

$$\Rightarrow \iint_{f(C\times[0,1])}\rho^2\,dx\,dy \geq m(f(C\times[0,1]))=1$$

$$\iint_{f(C\times[0,1])}\rho^2\,dx\,dy \leq \iint_{\Omega'}\rho^2\,dx\,dy \qquad \text{тј. } \boxed{A(\rho)\geq 1}$$