Материјали са вежби из Одабраних поглавља астрономије

Математички фаукултет у Београду

Последња промена : 08.12.2015.

мејл : vladimirjakobyss@gmail.com

Први час

Небеска сфера и њени елементи.

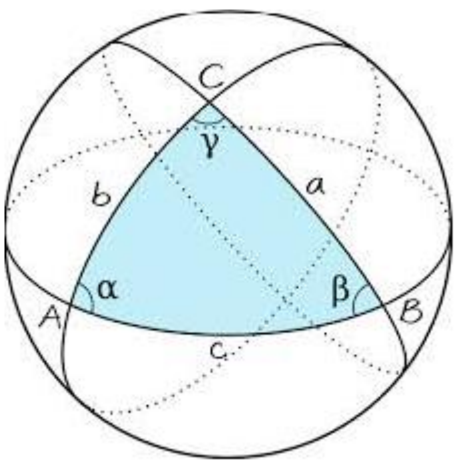
На сфери се могу дефинисати следећи појмови:

ДЕФИНИЦИЈА 1: **Велики круг** (иако је то уствари кружница) је пресек равни која садржи центар сфере и саме сфере.

ДЕФИНИЦИЈА 2: **Мали круг** је пресек равни која не садржи центар сфере и саме сфере тако да тај скуп није празан.

ДЕФИНИЦИЈА 3: **Сферни троугао** је скуп три тачке сфере и три лука великих кружница, од којих је сваки мањи од полукружнице и има крајеве у две од те три тачкама. (Слика 1.)

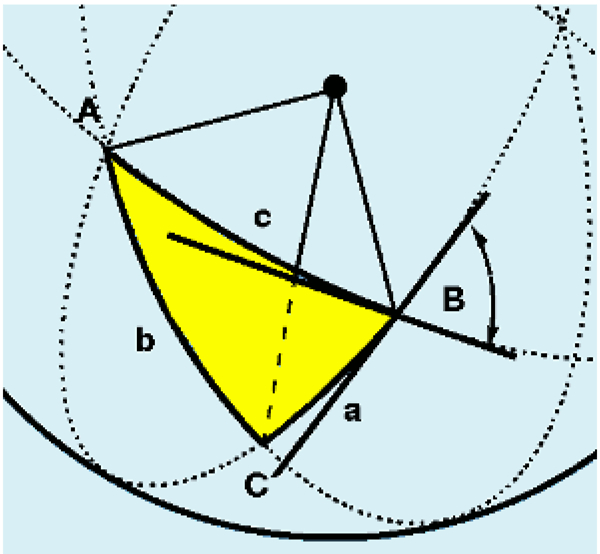
Збир углова сферног троугла већи је од два права и налази се између 180° и 540°.



Слика 1. Сферни троугао

.

ДЕФИНИЦИЈА 4: **Угао** између две странице (то су кружни лукови) на сферном троуглу је једнак углу који је, такорећи "најближи" сферном троуглу, између тангетних праваца великих кругова којима припадају те две странице, гледано у тачки где се спајају те две странице, тј. у темену које им је заједничко. (Слика 2.)



Слика 2. Угао између две странице сферног троугла

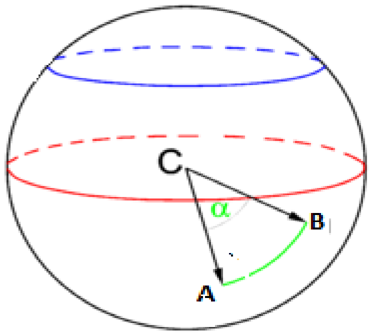
Звезде се на небу крећу по елиптичној путањи, али то кретање је само привидно јер је то у ствари последица ротације земље. Пошто су различитих удаљености од Земље ради лакшег одређивања положаја и не уплитања у то колико је она далеко од нас, у астрономији се уводи објекат који се назива **небеска сфера.** То је прва апроксимација свемира и свих небеских тела у свемиру.

ДЕФИНИЦИЈА5: **Небеска сфера** је сфера произвољног полупречника таква да је њен центар може бити:

1. у центру Земље (геоцентрична небеска сфера)
2. у центру Сунца (хелиоцентрична небеска сфера)
3. посматрач (топоцентрична небеска сфера)

Сва остала небеска тела су пројектована на ту сферу и у том случају за положаје звезда се узима положај њихових пројекција на небеску сферу. За небеску сферу се узима да је њен полупречник r јединична величина, то јест $r = 1$. При неком основном рачуну углавном узимамо довољно велики полупречник да се различити центри у суштини, односно апроксимативно исти.

Размотримо сада једну геометријску ствар. Нека је дата сфера јединичног полупречника са центром у тачки C и на њој кружни лук $\widehat{AB}$. (Слика 3.)



Слика 3.

Желимо да израчунамо његову дужину ако знамо колики је угао који заклапају вектори $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и то ће бити угао α .

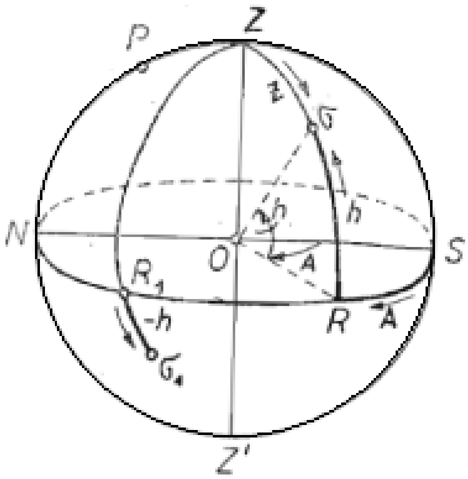
$$l(\widehat{AB}) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi = \alpha.$$

Дакле, добили смо да је та дужина једнака углу који заклапају вектори $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Напоменимо још да ћемо небеска тела увек обележавати са малим или великим сигма (σ или Σ)

Координатни системи у Астрономији

Хоризонтски координатни систем



Слика 4. Хоризонтски координатни систем

Основне карактеристике система: Основна раван система је раван посматрача(тј. раван на којој стоји посматрач) која се назива **хоризонтска раван**. То је дакле тангентна раван на Земљу у тачки (на месту) на којој стоји посматрач. Уређени пар координата је (A, z).

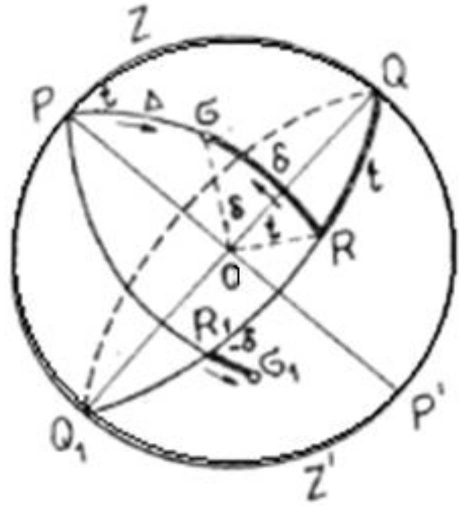
ДЕФИНИЦИЈА 1: **Азимут (А)** је прва координата хоризонтског координатног система. Мери се од правца центра небеске сфере O ка јужној тачки на хоризонсткој равни *S*, до правца центра небеске сфере O ка тачки *R* (на слици 4.) која представља пројекцију звезде σ на хоризинтску раван и то се све мери у ретроградном смеру (смеру казаљке на сату). Означава дужину лука $\widehat{SR}$, што је исто што и угао између праваца *OS* и *OR* по разматрању из претходног одељка. Азимут узима вредности од 0° до 360°.

ДЕФИНИЦИЈА 2: **Висина (h)** је угао између праваца $O\sigma$ и *OR*, а такође је и дужина лука $\widehat{R\sigma}$. Узима вредности од -90 °до 90°.

ДЕФИНИЦИЈА 3: **Зенитна даљина(z)** је друга координата хоризонстког координатног система. Представља допуну висине h, дакле важи једнакост $z + h = 90°$. Одатле добијамо да зенитна даљина узима вредности од 0° до 180°.

ДЕФИНИЦИЈА 4: Тачка **Z** се назива **Зенит.** Представља тачку тачно изнад нас, то јест правац управан на хоризонтску раван када се посматра од центра хоризонтске равни(посматрача) док се тачка **Z’** назива **надир.**

Месни екваторски координатни систем



Слика 5. Месни екваторски координатни систем у односу на зенит

Основне карактеристике система: Основна раван је раван која саджи екватор Земље. Правац *CP* је правац ка северном полу саме Земље и то је правац управан на екваторску раван. Колика је дужина лука $\widehat{PZ}$? То је уствари угао између два правца *CP* и *CZ*. Када мало боље размислимо то је уствари угао између равни која је управна на *CP*, а једна од њих је екваторска раван и равни управне на *CZ*, а једна од њих је хоризонтска раван. Тако да је то угао између хоризонстке и екваторске равни. Те две равни се поклапају када смо на северном полу, а када смо на екватору онда је наша хоризонтска раван управна на екваторску раван. Одатле можемо закључити да је $l(\widehat{PZ}) = 90° - \varphi$, где је φ посматрачева географска ширина (нпр. Београд има географску ширину 44 степена северно од екватора. Иначе географска ширина φ има опсег од $-90°$ до $90°$, за јужне тачке је негативна, а за северне је позитивна). Географску дужину ћемо обележавати са λ уколико буде потребе да је користимо. Још нешто ћемо обележавати са истим словом, али знаће се увек из контекста о којем се λ ради. Координате месног екваторског система су пар (t, δ).

ДЕФИНИЦИЈА 5: **Часовни угао(t)** означава угао између правца центра *O* ка јужној тачки *Q* (на часу смо користили и ознаку *Es* која се такође користи) и правца од центра *O* ка пројекцији звезде на екваторску раван, односно до тачке *R*. Такође означава и дужину лука $\widehat{QR}$. Мери су у ретроградном смеру и узима вредности од 0° до 360°. Чешће се часовни угао мери у часовима од 0*h* од 24*h*.

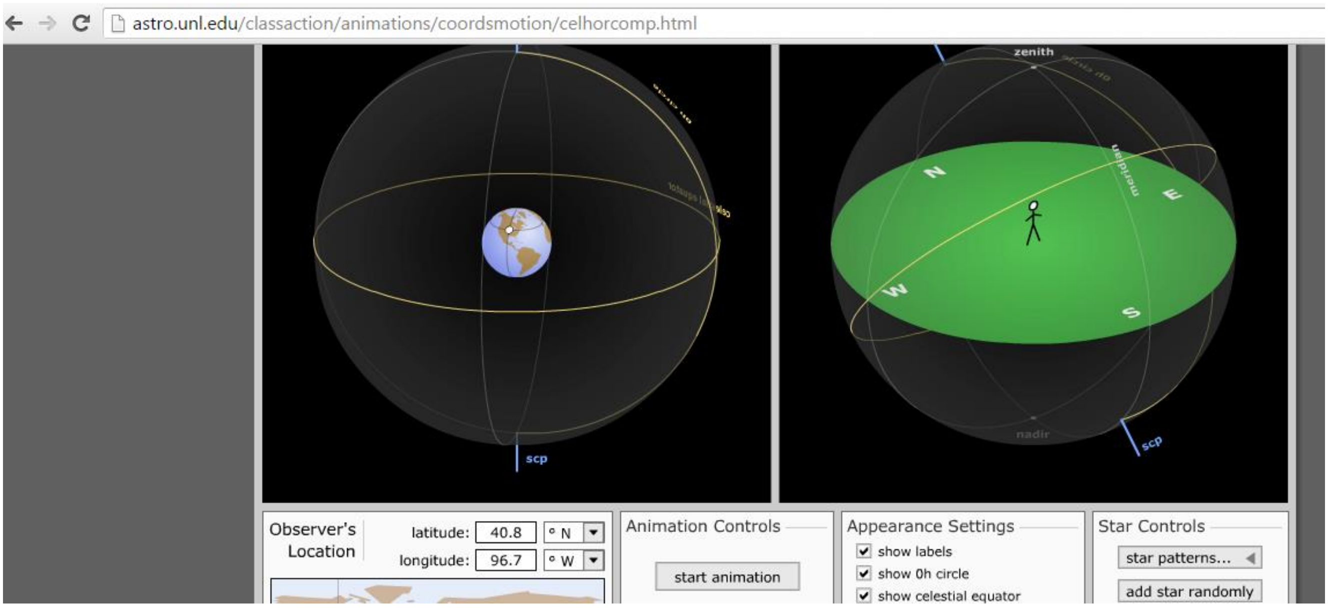
ДЕФИНИЦИЈА 6: **Деклинација(δ)** означава угао између праваца *CR* и Сσ. Када је звезда ближа северном полу него његовој дијаметрално супротној тачки узима позитивну вредност, у супротном негативну. Распон је од -90° до 90°. Иначе, деклинација је константна величина, одакле можемо закључити да се све звезде (као и остали небески објекти) крећу уствари не више по елипсама, већ по кружницама које леже у равни паралелној екваторској равни. Ове кружнице се називају **дневни паралели**.

На следећем линку можете наћи у каквој су вези хоризонтски и месни екваторски координатни систем.

http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/celhorcomp.html

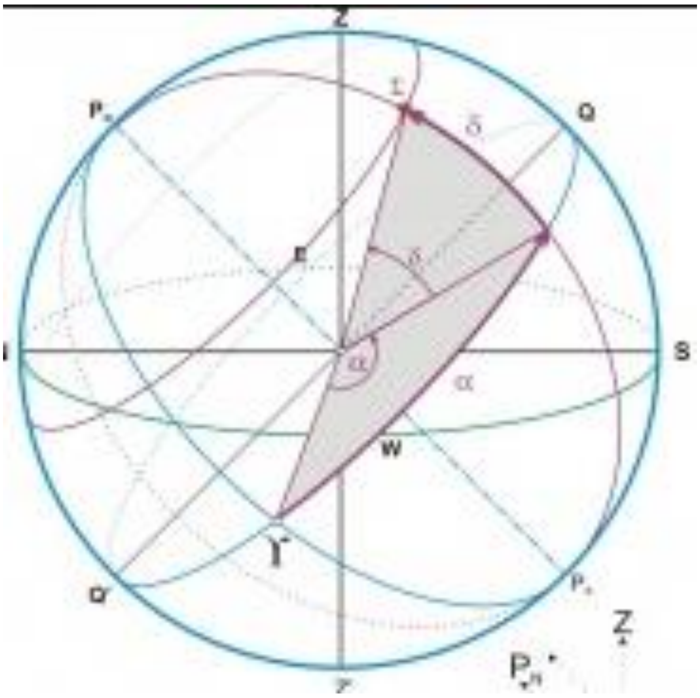
Ако је све како треба требало би да сте на страници као на слици 6.

Уколико претиснете Start animation дугме добијате како то изгледа у времену. Положаје на Земљи и томе слично мењајте по жељи. Да добијете све тачке које смо помињали досад чекирајте: show labels. Приметите да је *Pn* увек између *Z* и *Z'* и то са оне стране са које је *N*, односно северни пол на Земљи. Ако вас још нешто интересује питајте на мејл.



Слика 6.

Небески екваторски координатни систем

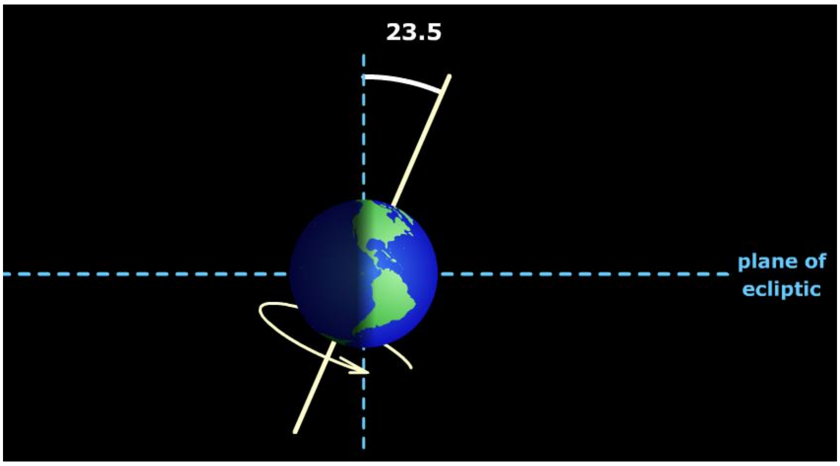


Слика 7. Небески екваторски координатни систем у односу на зенит и хоризонтску раван посматрача.

Основне карактеристике система: Основна раван је као и код месног екваторског система, екваторска раван. Потребно је дефинисати и следећу ствар:

ДЕФИНИЦИЈА 7: $\boldsymbol{\gamma}$ **тачка** је једно од места где се секу на небеској сфери екваторска раван и раван у којој су смештени путање већине планетарних објеката у сунчевом систему која се назива **еклиптика**. Пројекција сунца на екваторску раван дана када почиње пролеће је управо $\boldsymbol{\gamma}$ тачка.

Угао између еклиптике и екваторске равни се најчешће означава са ϵ и варира од 20 од 25 степени. Тренутно износи 23,5°. Занимљиво је да је заправо овај угао скоро константан и да му треба доста времена да се мења, реда величине хиљаде година. Због ове нагнутости заправо и постоје годишња доба. У конкретним израчунавањима мери се од екваторске равни ка еклиптичкој равни (БИТНО).



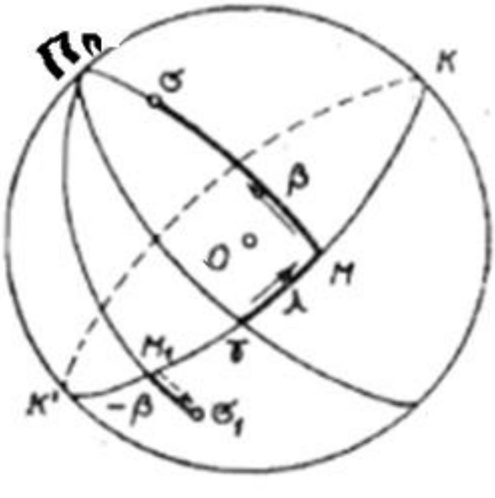
Слика: Однос еклиптике и екваторске равни се може описати и односом Земљине осе ротације и праве управне на еклиптику, јер угао између те две праве исти као и између еклиптике и екваторске равни.

Координате небеског екваторског система су (α, δ) где је друга координата потпуно иста као и она у месном екваторском (дакле, деклинација).

ДЕФИНИЦИЈА 8: **Ректасцензија (α)** је прва координата небеског екваторског система и мери се од правца (*Слика 7.*) од центра небеске сфере (та тачка на слици 7. није обележена ниједним словом) до гама тачке ка правцу од центра небеске сфере ка пројекцији звезде σ на екваторску раван (ни та тачка на слици 7. није обележена ниједним словом). Мери се у **директном** смеру и узима вредности од 0 до 360 степени, а често се мери и у часовима.

ДЕФИНИЦИЈА 9: **Звездано време (s)** означава **часовни угао γ тачке**. Одатле лако налазимо везу између ректасцензије и часовног угла : $\alpha = s - t$ (само проанализирајте) ако је часовни угао звезде на мањем од два лука између гама тачке и *Q*, јужне тачке на екватору , у супротном се узима да је $\alpha = 360° - (t - s)$ из разлога што је ректасцензија позитивна величина.

Еклиптички координатни систем



Слика 8. Еклиптички координатни систем.

Основне карактеристике система: Основна раван је раван сунчевог система, **еклиптика.** Координате су (λ, β).

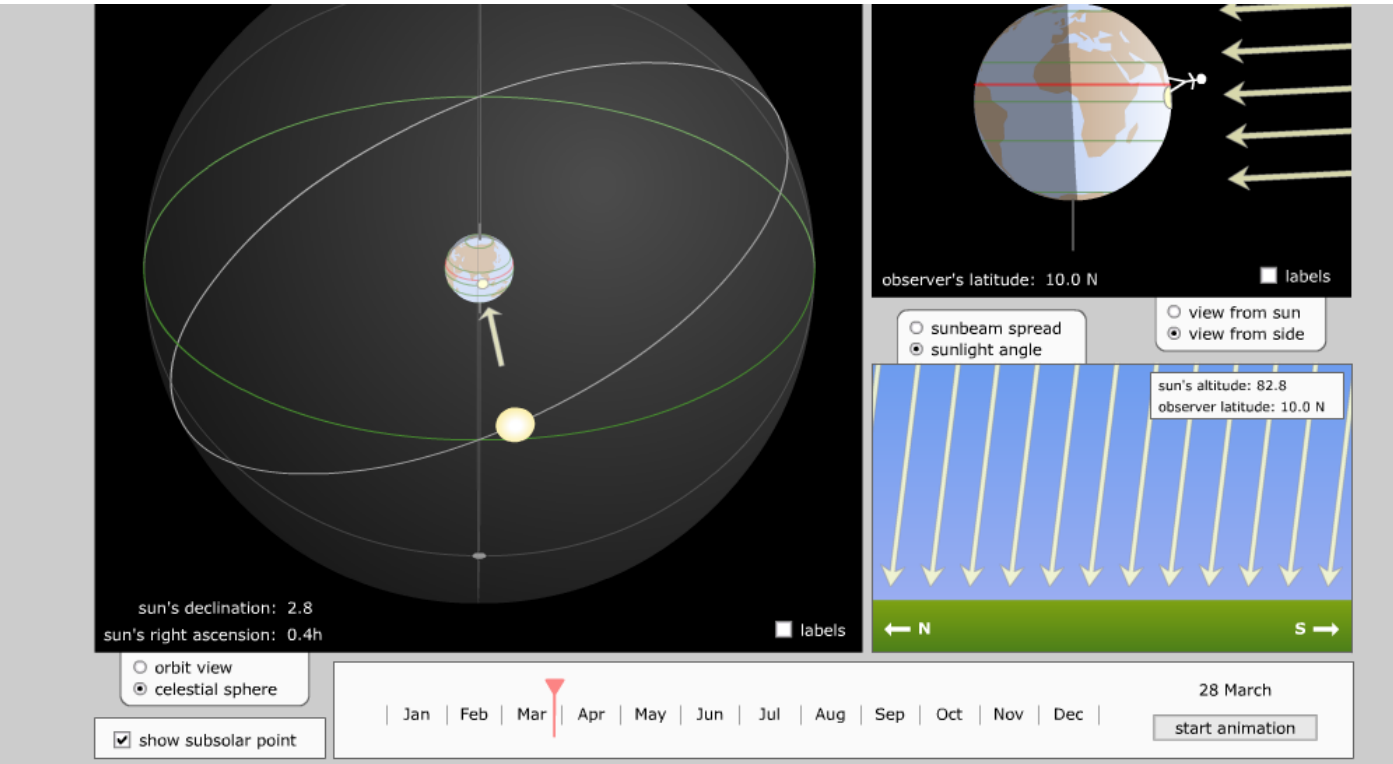
ДЕФИНИЦИЈА10: **Лонгитуда(λ)** је угао између праваца Оγ и ОМ са слике 8. ,где је тачка *М* пројекција звезде σ по великом кругу од Π_n до еклиптичке равни. Лонгитуда је исто што и дужина лука $\widehat{\gamma M}$. Мери се у директном смеру и узима вредности од 0 до 360 степени.

ДЕФИНИЦИЈА11 : **Латитуда(β)** је угао између праваца ОМ и Оσ са слике 8. што је исто што и дужина лука $\widehat{M\sigma}$. Узима вредности од -90° до 90° где су позитивне вредности за звезде ближе полу Π_n .

Уђите на следећи линк:

http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/eclipticsimulator.swf

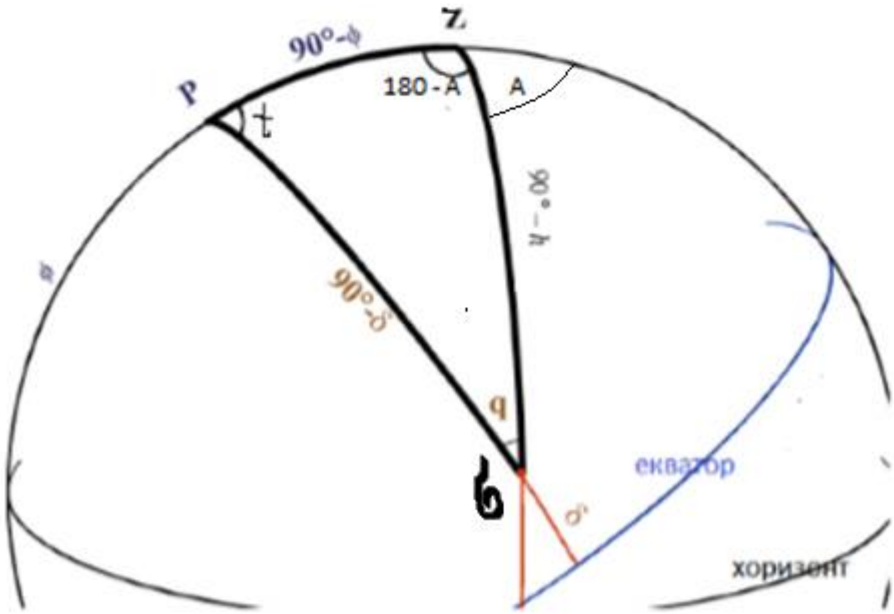
Требало би да сте ушли на страницу која је на слици 7. , с тим да само би требало да промените у доњем левом углу orbit view у celestial view. Кад то урадите кликните на start animation у доњем десном углу и кренуће симулације кретања сунца на небеској сфери. Sun declination и Sun right ascension су сунчева деклинација и ректасцензија. Ваш задатак би био да утврдите са анимације десно како падају сунчеви зраци на Земљу када је Сунце у положају гама тачке.



Слика 9.

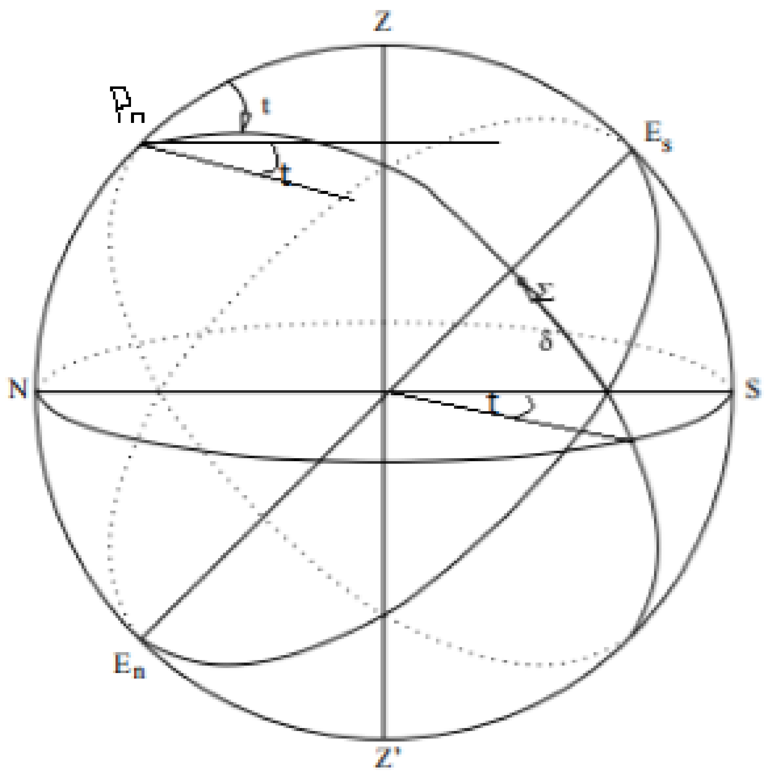
Положајни сферни троугао хоризонстког и месног екваторског координатног система.

(на Слици10.)



Слика10.

Приложићемо још неколико слика да би добро разумели шта је на слици.



Слика 11.

На Слици 11. видимо да је угао између лукова $\widehat{Pn\,\Sigma}$ и $\widehat{Pn\,Z}$ једнак часовном углу t (што се лако геометријски доказује). То је један од углова на слици 10.

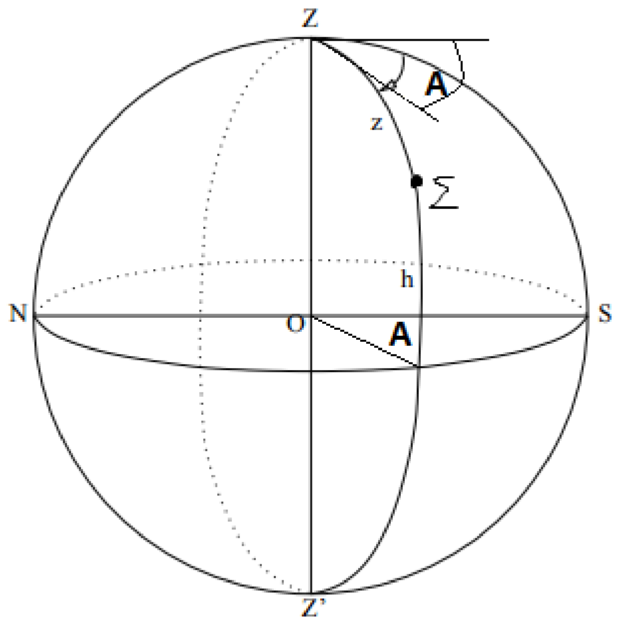
НАПОМЕНА1: Ово важи када је у питању западна звезда. За источну звезду(ону која има Азимут и часовни угао између 180 и 360 степени) ће бити $360° - t$.

НАПОМЕНА2: Треба размотрити узајамни положај Зенита и Северног пола. Дакле, ствар је следећа: Северни пол се увек налази на луку $\widehat{ZZ'}$ и то са оне стране на којој се налази и тачка *N* односно север на компласу као што смо већ једанпут рекли.

НАПОМЕНА3: Уколико је часовни угао између 0 и 180 степени, онда је и Азимут у истом интервалу. Важи и обратно. Уколико је часовни угао између 180 и 360 степени, онда је и Азимут у истом интервалу. Важи и обратно. Видећемо после један не баш формалан доказ зашто ово важи.

Размотили смо зашто је страница, тј лук $\widehat{Pn\,Z}$ једнак $90° - \varphi$. На слици 10. се такође јасно види зашто је лук $\widehat{\sigma P}$ једнак $90° - \delta$, што такође важи и за лук $\sigma\hat{Z}$ који је дугачак $90° - h = z$.

Угао q нас тренутно не интересује. Остало је да разјаснимо зашто је $\sphericalangle\widehat{PZ\sigma} = 180° - A$ (за источну тачку потпуно аналогно се добија $\sphericalangle\widehat{PZ\sigma} = A - 180°$.

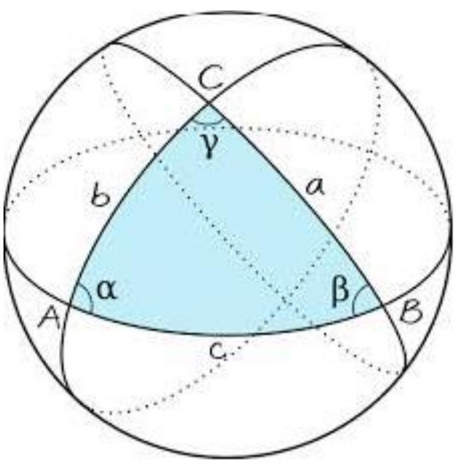


Слика 12.

Као што видимо на слици 12. где је дата хоризонтска раван и звезда, потпуно на исти начин као за часовни угао налазимо да је угао $\measuredangle\Sigma ZS = A$, то јест азимуту дате звезде Σ. Пошто важи формула суплементних углова на сфери, онда је и $\measuredangle\Sigma ZN = 180° - A$, а тај угао је уствари онај који ми и тражимо у сферном троуглу (види слику 10.), а то све важи јер се северни пол P налази на луку $\widehat{ZN}$.

НАПОМЕНА3 : Тачке $N, S, Es(\text{то јест } Q), En(\text{то јест } Q'), Z$ и P , дакле северни и јужни пол на компасу код хоризонтског координатног система, јужни и северни пол на екваторској равни(те се тачке само тако зову и не представљају географски ништа посебно), као и Зенит и тачка на небеској сфери која припада и правцу од центра земље ка северном полу(тј. тачка P), (све ово су главне тачке хоризонтског и месног небеског координатног система, види лекцију о тим коорд. системима) налазе се све на истом великом кругу!

Синусна, косинусна и Синусно - косинусна теорема



Слика 13. Сферни троугао

Нека је дат сферни троугао као на слици 13. Тада важе следеће формуле:

1. Косинусна теорема:

$$cosa = cosb\ cosc + sinb\ sinc \cos\alpha$$

И аналогно за остале две странице.

2. Синусна теорема:

$$\frac{sina}{sin\alpha} = \frac{sinb}{sin\beta} = \frac{sinc}{sin\gamma}$$

3. Синусно-косинусна теорема:

$$sina\ cos\beta = sinc\ cosb - cosc\ sinb\ cos\alpha$$

И аналогно за све остале случајеве.

Синусно-косинусна формула се памти на следећи начин. Одаберемо страницу, па било који налегли угао на ту страницу, па преосталу налеглу страницу на тај угао (ону која није ова са почетка), па поново те две странице су у игри, па на крају угао наспрам почетне странице. Синус, косинус, синус, косинус, косинус, синус, косинус се памти као месеци у години где ће двапута заредом косинус да имитира јул и август који имају оба по 31 дан. И не заборавите да је у формули минус!

Други час

Задаци.

1. Трансформисати небеске екваторске координате у еклиптичке.

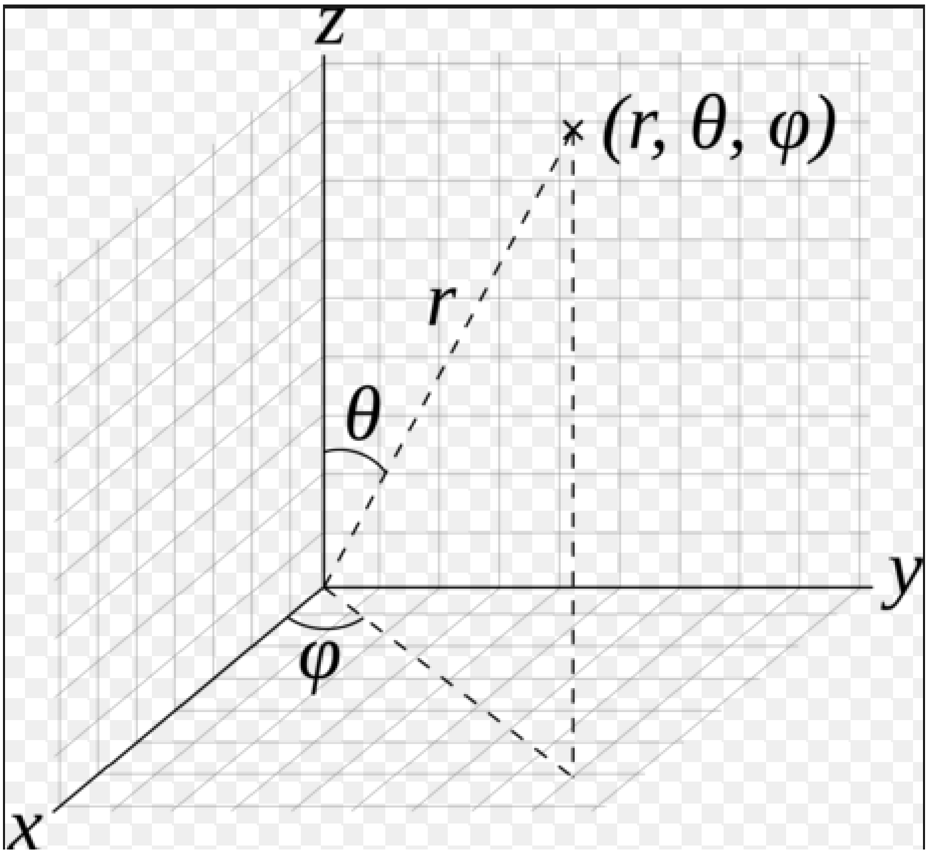
Решење: Подсетимо се за кратко пар ствари. Сферни координатни систем се у $\mathbb{R}^3$ уводи на следећи начин :

$$x = rsin\theta cos\varphi$$

$$y = rsin\theta sin\varphi$$

$$z = rcos\theta$$

Где $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$ (на слици 1.)



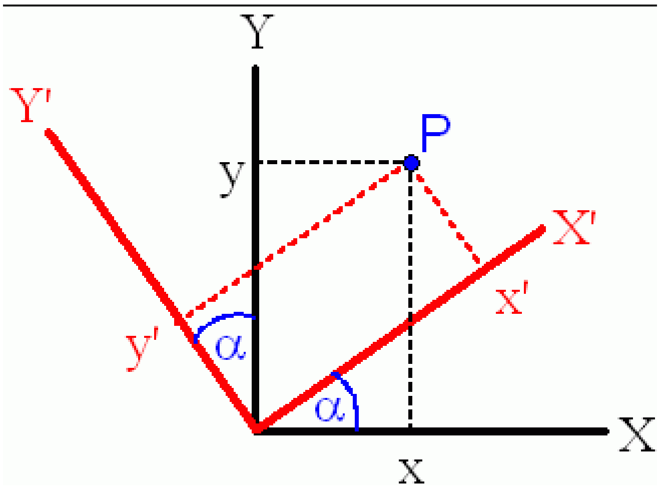
Слика1 : Сферне координате

Подсетимо се још и промена координата тачке приликом ротације координатног система за неки угао α. (на слици 2.) Приликом ове промене на тачка *P=(x,y) y>0* , на слици2. има нове кооридaнате *(K,0), K*$\in \mathbb{R}^+$. То нам даје закључак да је ротирање координатног система за угао α исто као следећа трансформација: ротирација свих тачака за угао – α. Стога је важи следећа формула (примови су нове координате тачке):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos - \alpha & -sin - \alpha \\ sin - \alpha & cos - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

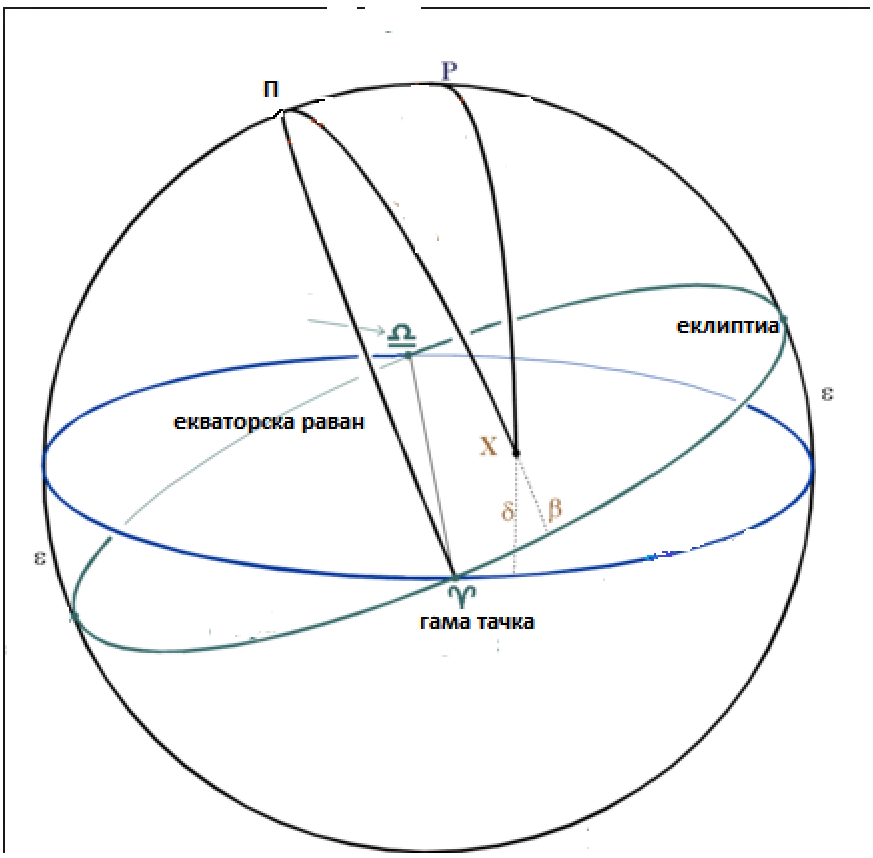
Сада замислимо све ово у три димензије (радили смо у две да се не би слика компликовала), ротирамо координатни систем око x осе за угао α. Та трансформације сада изгледа овако:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos - \alpha & -sin - \alpha \\ 0 & sin - \alpha & cos - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Слика 2. Ротација координатног система

Ово смо све урадили због нашег решења: Прогласимо праву која пролази кроз центар небеске сфере и садржи γ тачку тако да она има позитивну x координату да буде x оса и тако да γ тачка има позитивну x координату. Праву која је нормална на тако проглашену x осу и пролази кроз центар небеске сфере и припада еваторској равни прогласимо y осом тако да је позитиван смер ка тачки која припада екваторској равни и на 90 је степени ректасцензије , а праву која садржи центар небеске сфере и тачку P z осом тако да P има позитивну z координату.



Слика 3. Однос еклиптике и екваторске равни и одговарајућих координатних система.

На слици 3. се види однос еклиптичких и небеских екваторских координата. Еклиптичке су уствари заротиране небеске екваторске за угао $\varepsilon = 23{,}5°$ јер обе мере од гама тачке у директном смеру ректасцензију, односно лонгитуду , док је деклинација пандан латитуди. Такође, у небеском екваторском систему је за ново уведени *Oxyz* систем координата ректасцензија уствари угао φ у сферном координатном систему, док је деклинација уствари угао $90° - \theta$. Сфера је јединична па је *r=1.* Ротацијом координатног система *Oxyz* за угао $\varepsilon = 23{,}5°$ сада лонгитуда постаје φ, а латитуда постаје $90° - \theta$ у сферном координатном систему. После све те анализе поставимо једначину:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos-\varepsilon & -sin-\varepsilon \\ 0 & sin-\varepsilon & cos-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(90° - \delta) cos\alpha \\ \sin(90° - \delta) sin\alpha \\ cos(90° - \delta) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(90° - \beta) cos\lambda \\ \sin(90° - \beta) sin\lambda \\ cos(90° - \beta) \end{pmatrix}$$

, па је:

$$\begin{pmatrix} \sin(90° - \beta) cos\lambda \\ \sin(90° - \beta) sin\lambda \\ cos(90° - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos-\varepsilon & -sin-\varepsilon \\ 0 & sin-\varepsilon & cos-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(90° - \delta) cos\alpha \\ \sin(90° - \delta) sin\alpha \\ cos(90° - \delta) \end{pmatrix}$$

То јест:

$$\begin{pmatrix} cos\beta cos\lambda \\ \cos\beta sin\lambda \\ sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varepsilon & sin\varepsilon \\ 0 & -sin\varepsilon & cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\delta cos\alpha \\ \cos\delta sin\alpha \\ sin\delta \end{pmatrix}$$

Из ових матричних једначина извлачимо:

$$cos\beta cos\lambda = \ cos\delta cos\alpha$$

$$\cos\beta sin\lambda = \ cos\varepsilon \cos\delta sin\alpha + \ sin\varepsilon\ sin\delta$$

$$sin\beta = -sin\varepsilon \cos\delta sin\alpha + \ cos\varepsilon\ sin\delta$$

Пошто $\beta \in [-90°, 90°]$, знамо да је ту синус једнозначан.

Остало је још да одредимо λ. Поделимо другу једначину првом:

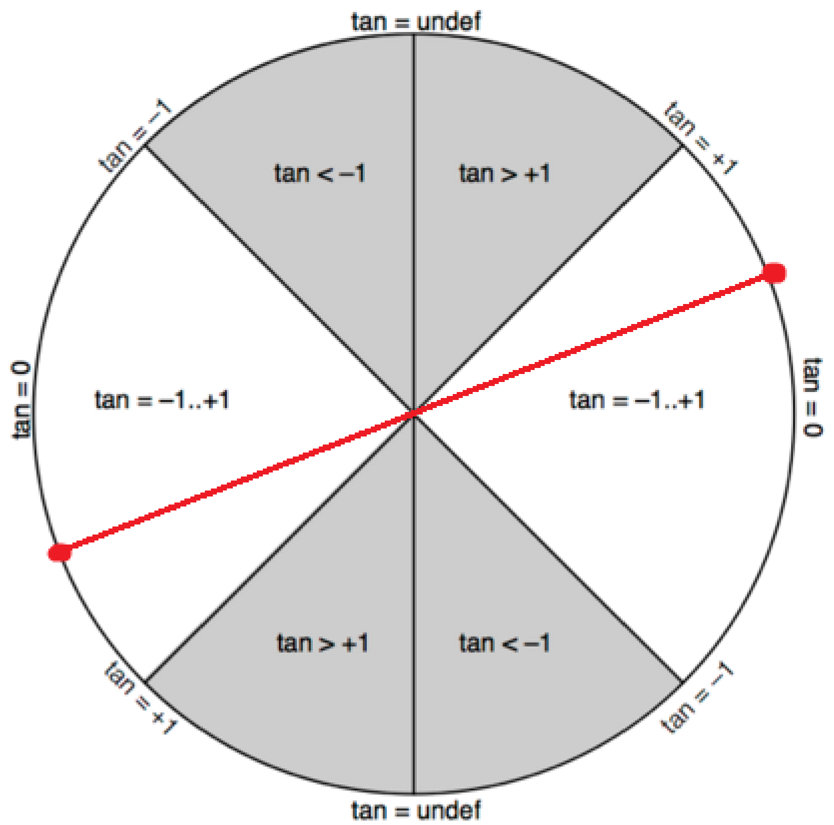
$$\frac{\cos\beta sin\lambda}{cos\beta cos\lambda} = \frac{cos\varepsilon \cos\delta sin\alpha + sin\varepsilon\ sin\delta}{cos\delta cos\alpha} ,$$

То јест скраћивањем са $\cos\beta \neq 0$ са леве и $cos\delta \neq 0$ са десне стране добијамо:

$$tan\lambda = \frac{sin\lambda}{cos\lambda} = \frac{cos\varepsilon\ sin\alpha + \ sin\varepsilon\ tan\delta}{cos\alpha}$$

Уколико је $\cos\beta = 0$ тада смо на полу па немамо ни дефинисану лонгитуду! Ако је $cos\delta = 0$ оставимо $cos\delta$ и онда је $tan\lambda = \pm\infty$.

Вредност тангенса је иста за две дијаметрално супротне тачке на тригонометријском кругу (слика 4.)



Слика 4. Две црвене дијаметрално супротне тачке имају исти тангенс.

На основу тога колика је ректасцензија(тј у ком је квадранту) можемо закључити да ће и лонгитуда бити ту негде. На пример, ако је ректасцензија 26° не може лонгитуда бити 198°, већ ту негде релативно близу 26°. На овај начин је и лонгитуда једнозначно одређена.

2. Трансформисати еклиптичке координате у небеске екваторске.

Решење:

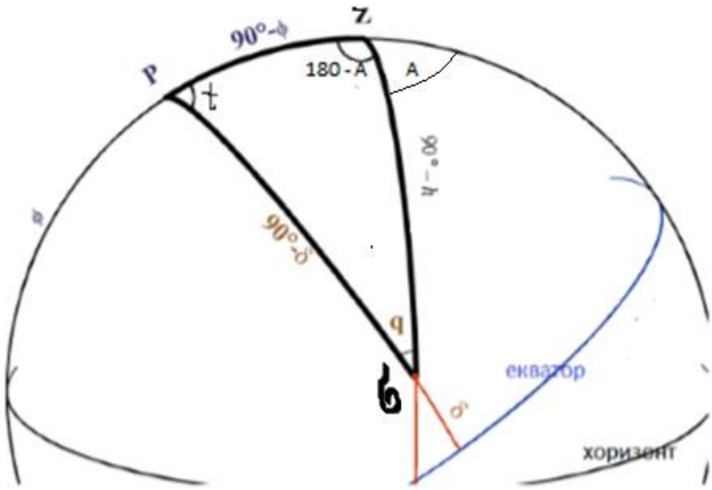
На потпуно аналоган начин све се ради као и 1. задатак, само се сада координатни систем ротира за $-\epsilon = -23{,}5°$.

Ово провежбајте сами.

3.Трансформисати хоризонстске координате у месне екваторске.

Решење:

За западну звезду σ важи да је следећа слика 5. њен сферни троугао:



Слика 5.

Према косинусној теореми је:

$$\cos(90° - \delta) = \cos(90° - \varphi)\cos z + \sin(90° - \varphi)\, sinz \cos(180° - A)$$

Сређивањем добијамо:

$$sin\delta = sin\varphi cosz - cos\varphi sinz\, cosA$$

За источну звезду је уместо t убачено на сферни троугао $360° - t$, а уместо $180° - \mathrm{A}$ убачено $\mathrm{A} - 180°$.

$$\cos(90° - \delta) = \cos(90° - \varphi)\cos z + \sin(90° - \varphi)\, sinz \cos(\mathrm{A} - 180°)$$

То би после сређивања дало исто:

$$sin\delta = sin\varphi cosz - cos\varphi sinz\, cosA$$

Како је синус једнозначан на [-90°, 90°] имамо једнозначну деклинацију.
Сада треба наћи и часовни угао. Следеће важи и за западну и за источну звезду. Како је Азимут дат и налази или од 0 до 180 степени или од 180 до 360 степени тада знамо где је часовни угао 0 до 180 степени или од 180 до 360 (о овоме смо већ причали).Из следеће једнакости:

$$cosz = \cos(90° - \delta)\cos(90° - \varphi) + \sin(90° - \delta)\sin(90° - \mathrm{\varphi})\,\mathrm{cost}$$

Када средимо једначину и изразимо cost преко свих осталих у једначини добијамо:

$$\cos(360° - t) = cost = \frac{cosz - \ sin\delta sin\varphi}{cos\varphi cos\delta}$$

На [0°, 180°] , или ако је часовни угао између [180°, 360°], косинус је једнозначан па имамо и часовни угао.

3. Трансформисати месне екваторске координате у хоризонтске.

Решење: За обрнуту трансформацију опет се служимо сликом 5. Најпре, лако налазимо зенитну даљину из косинусне формуле:

$$cosz = \cos(90° - \delta)\cos(90° - \varphi) + \sin(90° - \delta)\sin(90° - \varphi)\,\mathrm{cost}$$

тј.

$$cosz = sin\delta sin\varphi + \mathrm{cos\delta cos\varphi cost}$$

Како је зенитна даљина у опсегу од 0 до 180 степени опет имамо једнозначну зенитну даљину.

Сада Азимут. Користимо синусну теорему. Ту имамо да је

$$\frac{sinz}{sint} = \frac{\sin(90° - \delta)}{\sin(180° - A)} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{sinq}$$

Користићемо само прву једнакост у синусној теореми.
Потребна нам је синусно-косинусна теорема:

$$sinzcos(180 - A) = \sin(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) - \cos(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\,cost$$

Сада делећи синусну једначину малопређашњом је:

$$\frac{\frac{sinz}{sint}}{sinzcos(180 - A)} = \frac{\frac{\sin(90° - \delta)}{\sin(180° - A)}}{\sin(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) - \cos(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\,cost}$$

Што је еквивалентно са:

$$\frac{\frac{1}{sint}}{cos(180 - A)} = \frac{\frac{\cos\delta}{\sin(180° - A)}}{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\,cost}$$

, онда када је зенитна даљина различита од 0 и 180 у супротном Азимут није ни дефинисан.

$$\tan(180° - A) = \frac{\sin(180° - A)}{cos(180° - A)} = \frac{sint}{\cos\varphi\tan\delta - \sin\varphi cost}$$

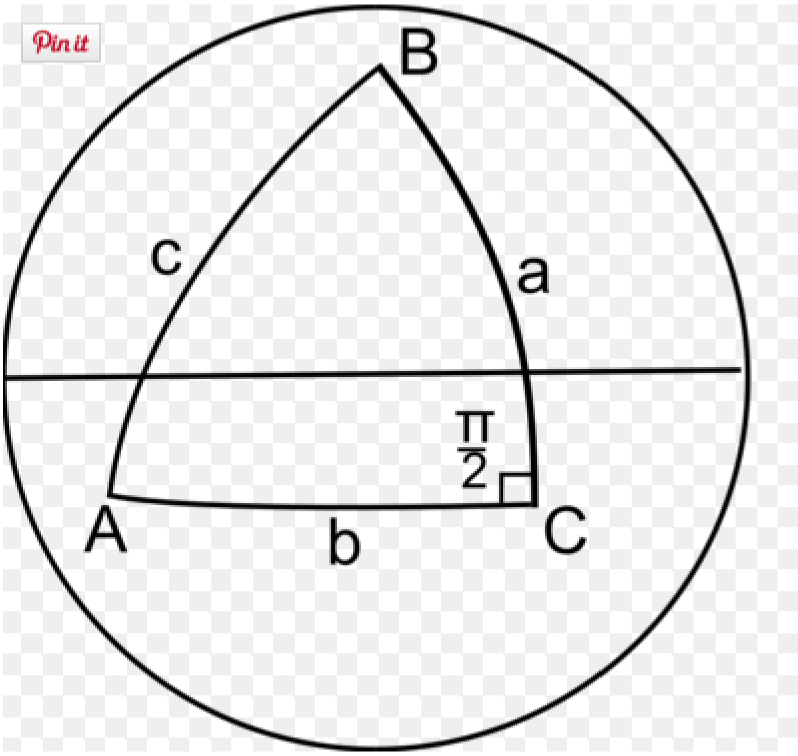
Пошто знамо где је часовни угао, у тој полуравни ће бити и Азимут ,

па за добијену вредност $\tan(180° - A)$ опет можемо да извучемо једнозначну вредност Азимута.

Трећи Час

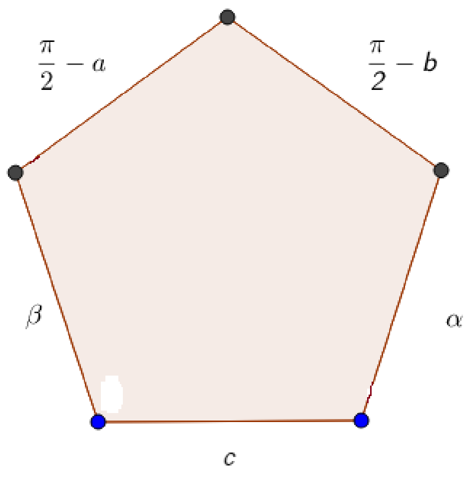
Правоугли сферни троугао. Неперова правила.

Правоугли сферни троугао је посебан случај сферног троугла, код кога један од три угла или једна од три странице износи $90°$. За решавање елемената правоуглог или квадратног сферног троугла користе се посебни обрасци који се називају Неперовим правилима. Неперова правила се могу исказати на следећи начин:

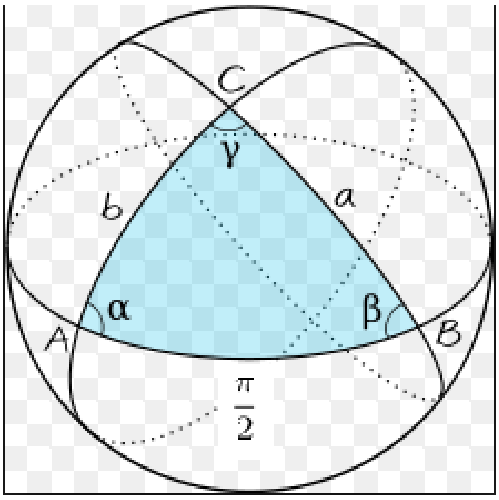


Слика1. Правоугли сферни троугао

1. Уколико је дат правоугли сферни троугао онда се формира петоугао (слика 2.) тако да се од свих страница и углова сферног троугла изоставља онај угао који прав, док је у подножју петоугла страница наспрам правог угла(у нашем случају на слици је то страница c). Даље, суседне странице те странице на петоуглу би били суседни елементи на сферном троуглу (на слици 1. су то углови код темена А и В, које ћемо означити на слици 2. наравно са α и β). Следећа два елемента су $\frac{\pi}{2}$ умањено за сусед угла α, а то је страница b и $\frac{\pi}{2}$ умањено суседом угла β , односно страницом a (слика 2.)

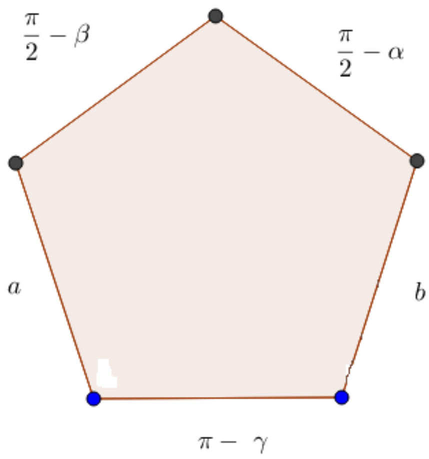


Слика 2. Неперов петоугао правоуглог сферног троугла.



Слика 3. Квадратни сферни троугао.

2. Други случај би био када имамо када имамо квадратни сферни троугао, односно троугао такав да је једна од страница једнака $90°$(слика 3). Тада се формира Неперов петоугао на мало другачији начин (слика 4.). У подножју је сада $\pi - \gamma$ где је γ угао наспрам правоугле странице. Суседи од $\pi - \gamma$ су суседи од γ на сферном троуглу, а то су странице *a* и *b.* Следећа два елемента би били $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\frac{\pi}{2} - \beta$ тако да је пред *a* елемент $\frac{\pi}{2} - \beta$*,* јер је сусед на сферном троуглу од *a* угао β (слика 3.) и иста ствар важи за *b* и $\frac{\pi}{2} - \alpha$.



Слика 4. Неперов петоугао за квадратни сферни троугао.

ТЕОРЕМА 1: (НЕПЕРОВА ПРАВИЛА) Ако је дат Неперов петоугао у случају 1. или у случају 2. важе следеће формуле:
Случај 1. (правоугли сферни троугао, Слика 1. и Слика 2.) На Неперовом петоуглу је :

$$\cos \mathrm{c} = \sin(90° - a)\sin(90° - b)$$
$$\cos c = cot\alpha\ cot\beta$$

И ово важи за сваки одабрани елемент. Односно ове исте формуле важе и када одаберемо нпр. Елемент петоугла $90° - b$. Тада је аналогно као малочас:

$$\cos(90° - b) = \sin\beta \sin c$$
$$\cos(90° - b) = \cot\alpha \cot(90° - a)$$

Дакле, може се рећи следеће : косинус неког елемента на Неперовом петоуглу једнак је производу синуса супротних елемената на Неперовом петоуглу или производу котангенса суседних елемената.
Случај 2. (квадратни сферни троугао, Слика 3. и Слика4.) Потпуно исто правило. На Неперовом петоуглу је:

$$\cos(180° - \gamma) = \sin(90° - \alpha)\sin(90° - \beta)$$
$$\cos(180° - \gamma) = \cot a \cot b$$

Или за неки други елемент нпр. *b* :

$$\cos b = \sin(90° - \beta)\sin a$$
$$cosb = \cot(90° - \alpha)\cot(180° - \gamma)$$

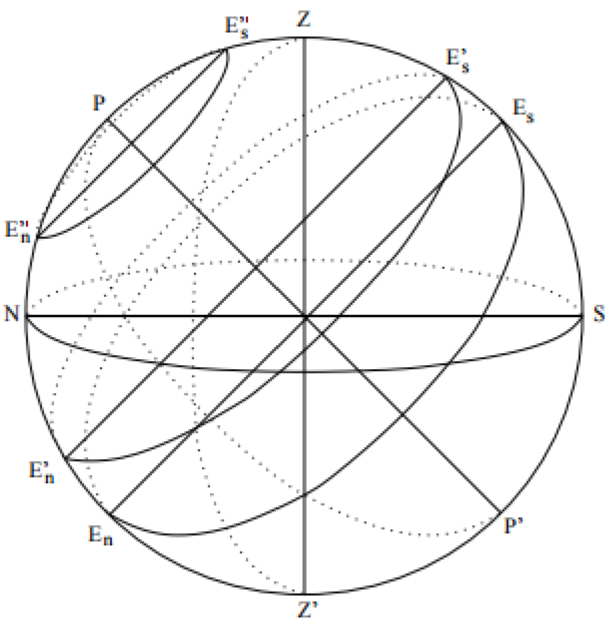
Специјални положаји небеских тела

Током свог привидног кретања по небеској сфери, небеско тело пролази кроз неколико карактеристичних положаја у односу на опажача. У свим наредним извођењима сматраћемо да су познате следеће величине:

- Географске координате места опажања неба (географска дужина и ширина)
- Небеске екваторске координате небеског тела (ректасцензија и деклинација)

Задатак је израчунати хоризонтске координате небеског тела (азимут и зенитно одстојање). У скоро свим специјалним положајима израчунаваћемо и часовни угао t. Тамо где то не буде учињено остављам за вежбу, јер смо то или већ радили у претходним разматрањима или је очигледно.

Пролазак небеског тела кроз главни меридијан



Слика 1. Es' и En' су редом горња и доња кулминација за јужнију звезду, док су Es'' и En'' редом горња и доња кулминација за севернију звезду.

ДЕФИНИЦИЈА1: **Главни меридијан** је кружница на небеској сфери која садржи тачке *Es(*тј.*Q), S, Z, P,En(*тј. *Q').*

Рекли смо већ да се небеска тела (звезде) крећу по кружници која је паралелна са екваторском равни, тако да очигледно небеско тело два пута сече главни меридијан (слика 1.) и то у тачкама *Es'* и *En'* (у случају јужније звезде на слици 1.). Ови положаји се називају редом горња и доња кулминација. У зависности од тога да ли је горња кулминација северно или јужно од тачке зенита (мерећи њихову деклинацију) разликујемо северније и јужније звезде у односу на зенитску паралелу. Како је деклинација Зенита једнака φ , из разлога што је растојање Зенита и северног пола, дакле $l(\widehat{ZP}) = 90° - \varphi$, имамо да за јужније звезде важи :

$$\varphi > \delta$$

За северније онда важи:

$$\varphi < \delta$$

Израчунајмо сада Азимут и зенитну даљину у доњој и горњој кулминацији за севернију звезду(*En''* и *Es''* положаји за севернију звезду).

Са слике 1. видимо да је :

$$A\,(En'') = 180°$$

$$z(En'') = (90° - \delta) + (90° - \varphi) = 180° - \delta - \varphi$$

$$A\,(Es'') = 0°$$

$$z\,(Es'') = (90 - \varphi) - (90 - \delta) = \delta - \varphi$$

НАПОМЕНА1. : Ако је $180° - \delta - \varphi > 180°$ онда тачка доње кулминације има азимут $0°$, а тачка горње кулминације Азимут $180°$, а зенитна даљина нпр. доње кулминације је $360° - (180° - \delta - \varphi)$ је па се горње формуле мењају али нећемо да компликујемо, довољно је добро овако и на колоквијуму неће бити ништа више од овог што пише.

Оговарајуће једначине за јужнију звезду уз напомену 1. би биле:

$$A(En') = 180°$$

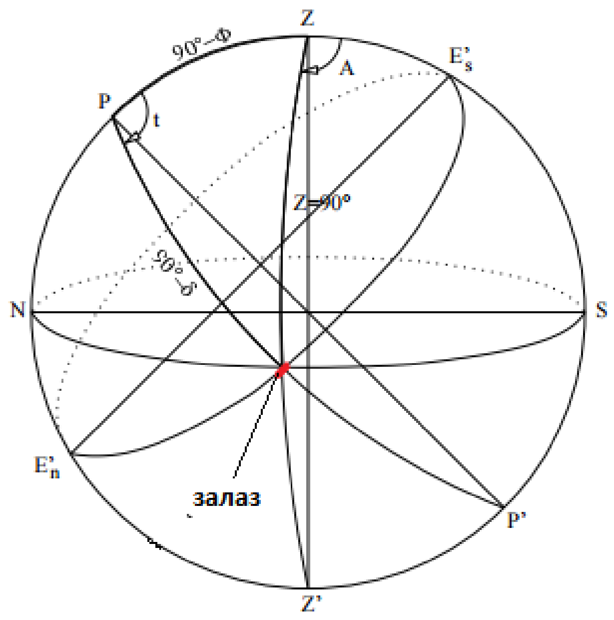
$$z(En') = 180° - \delta - \varphi$$

$$A(Es') = 0°$$

$$z\,(Es') = (90 - \delta) - (90 - \varphi) = \varphi - \delta$$

Још само да одгонетнемо зашто је ово специјални положај небеског тела. Уколико мало боље осмотримо положајни сферни троугао небеског тела и то јужније звезде(без умањења општости осим што се мења редослед тачака за севернију звезду) у положају горње кулминације (аналогно за доњу) видимо да је Азимут једнак $0°$ па је у положајном сферном троуглу елемент $180° - A = 180°$, односно, уопште више немамо положајни сферни троугао већ лук $\Sigma\widehat{ZP}$. Колики је часовни угао размотрите сами.

Излаз и залаз небеског тела



Слика 2. На слици је приказан црвеном тачком залазак звезде

Тренуци излаза и залаза небеског тела се добијају као пресечне тачке дневног паралела небеског тела са равни хоризонта (слика 2.). Пресечна тачка са западне стране небеске сфере (A и t су између $0°$ и $180°$) се назива тачком залаза, док се источна пресечна тачка назива тачком изласка небеског тела. Да би обе две тачке постојале, потребно је, не и довољно да буде испуњен услов $\delta < 90° - \varphi$. Тада је зенитна даљина доње кулминације(било да је севернија, било да је јужнија звезда, о томе да ли може бити севернија звезда таква да има излазак и залазак размислите сами):

$$z(En') = (90° - \delta) + (90° - \varphi) = 90° + 90° - \varphi - \delta > 90° + \delta - \delta = 90°$$

Ово значи да је доња кулминација испод равни хоризонта одакле следи закључак.

Да размотримо још и зашто није довољно да важи претходно наведено. Уђите поново на линк

http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/celhorcomp.html

У Appearance settings имате да чекирате show never rise region. За звезде у том региону (ако је звезда у некој тачки у тој области, онда је у свакој тачки у тој области, јер је њена орбита паралелна екваторској равни) зенитна даљина горња кулминације већа од 90° , стога оне никад не излазе, нити залазе, нити се виде гледајући из неког фиксираног положаја на Земљи.

Ту такође постоји и show rise and set region. Чекирајте њега. У тој области су опет пуном својом орбитом разне звезде и све те звезде имају излаз и залаз. Задатак за вас: Померајте свој положај на мапи света у доњем левом углу и пробајте да нађете место на Земљи где има најмање звезда које немају излаз и залаз и не виде се на небу из датог положаја.

Небеско тело се у тренутку залаза (излаза) налази у положају да је зенитна даљина њега самог у том тренутку $z = 90°$.

Напишимо косинусну једначину за $90° - \delta$:

$$cos(90° - \delta) = cosz\, cos(90° - \varphi) + sinz\, sin\,(90° - \varphi)\, cos(180° - A_z)$$

Мењамо $z = 90°$:

$$cos(90° - \delta) = sin\,(90° - \varphi)\, cos(180° - A_z)$$

$$\cos A_z = -\frac{\sin\delta}{cos\varphi}$$

Нашли смо Азимут залаза. Подсетите се мало положајног сферног троугла за источне тачке па нађите Азимут излаза за вежбу.

Часовни угао можемо израчунати применом косинусне једначине за z (ово је опет за залазак, за излазак пробајте сами):

$$cos\,z = cos(90° - \varphi)\, cos(90° - \delta) + sin\,(90° - \varphi) sin\,(90° - \delta)\, cost$$

Одакле се после сређивања добија и убацивања $z = 90°$:

$$0 = sin\,\varphi\, sin\delta + \cos\varphi\, cos\,\delta\, cost$$

$$cost = -tan\varphi \tan\delta$$

ДЕФИНИЦИЈА1 : **Циркумполарна звезда** је таква да никад не залази и види се увек на небу, односно важи : $\delta > 90° - \varphi$.

Додатна информација о месту излаза и залаза небеског тела може се добити на основу знака деклинације. Ако је деклинација позитивна, тада је из :

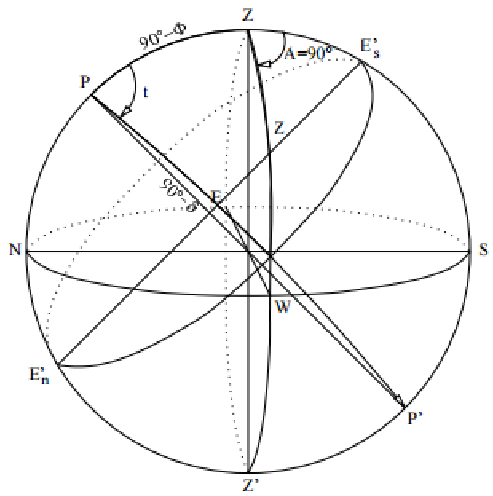
$$\cos A_z = -\frac{\sin\delta}{cos\varphi}$$

$$\Longrightarrow \cos A_z < 0$$

$$\Longrightarrow 90° < A_z < 180°$$

И слично ако је деклинација негативна $\Longrightarrow 0° < A_z < 90°$.

Пролазак небеског тела кроз први вертикал



Слика 3. Пролазак кроз први вертикал.

ДЕФИНИЦИЈА1 : **Први вертикал** је велики круг на небеској сфери такав да свака звезда у тренутку проласка кроз њега има Азимут или 90° или 270° (слика 3.).

У случају проласка кроз проласка кроз први вертикал задатак је наравно израчунати елементе положајног сферног троугла . Потребан услов да тело прође кроз први вертикал можемо извести :

$$\cos(90° - \delta) = \cos z \cos(90° - \varphi) + \sin z \sin(90° - \varphi) \cos(180° - A)$$

Мењањем $A = 90°$ или $A = 270°$ (што значи да је свеједно у овом случају да ли ставити $180° - A$ или $A - 180°$) и сређивањем је:

$$\cos(90° - \delta) = \cos z \cos(90° - \varphi)$$

$$sin\delta = \cos z\, sin\varphi$$

Имамо дакле да је

$$-1 \leq \cos z \leq 1$$

Па је и

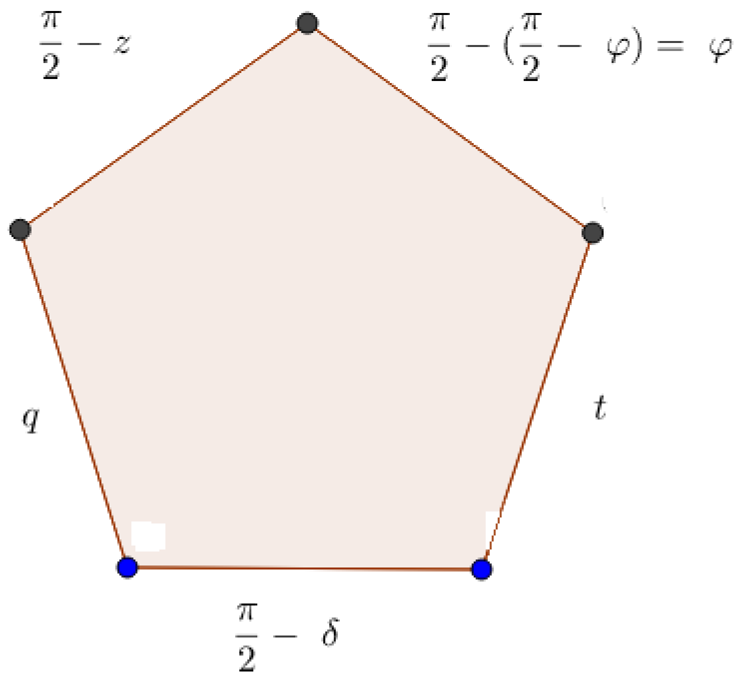
$$-1 \leq \frac{sin\delta}{sin\varphi} \leq 1$$

$$-sin\varphi \leq sin\delta \leq sin\varphi$$

$$-\varphi \leq \delta \leq \varphi$$

Јер $\delta, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а ту је синус растући. Ово би био потребан услов да постоји пролазак кроз први вертикал.

Израчунајмо зенитно растојање небеског тела при проласку кроз први вертикал на западу користећи овај пут Неперова правила чисто вежбе ради. Како је $A = 90°$ имамо да је Неперов петоугао(слика 4.):



Слика 4.

Одавде је

$$\cos(90° - \delta) = \sin(90° - z) sin\varphi$$

$$cosz = \frac{sin\delta}{sin\varphi}$$

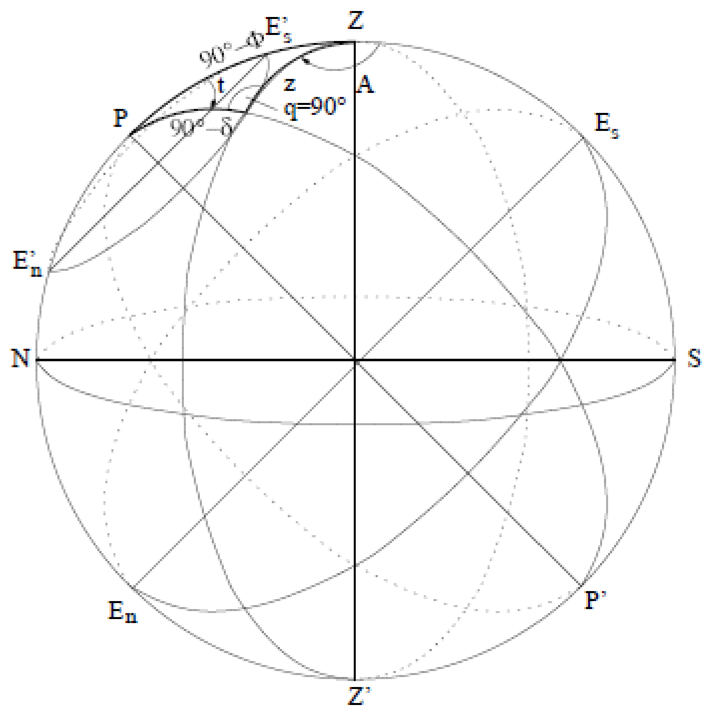
Азимут знамо да је или 90° или 270°.

Часовни угао за западни пролазак ћемо срачунати из Неперовог правила:

$$cost = \cot(90° - \delta) \cot \varphi$$

Четврти час

Највећа дигресија (елонгација) небеског тела



Слика 5. Највећа дигресија небеског тела

ДЕФИНИЦИЈА1: **Угао q** у положајном сферном троуглу се назива **паралактички угао**.

У тренутку највеће дигресије, паралактички угао у основном сферном троуглу је једнак 90°. Може се посматрати максимално удаљење небеског тела од равни главног меридијана. Дакле, то су две тачке : управо тачке највеће дигресије небеског тела (ово се добија здравом логиком, а ако неко није убеђен нека рачуна екстремуме растојања звезде у односу на главни меридијан тако да је паралакса променљива која се диференцира, током кретања па ће добити). Напоменимо да је највећа дигресија појава карактеристична само за северније звезде, односно оне за које важи да је:

$$\delta > \varphi$$

Ово нећемо изводити, али можете наслутити да ће за јужније звезде паралактички угао бити оштар.

Пошто су нам познати δ и φ применом Неперовог правила (нацртајте сами за вежбу, ја ћу на часу) добијамо:

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\delta\sin(90° - z)$$

, па је

$$cosz = \frac{sin\varphi}{sin\delta}$$

Израчунајмо Азимут највеће дигресије са западне стране:

$$\cos\delta = \sin(90 - \ \varphi)\sin(180° - \mathrm{A}_z)$$

Одакле следи да је :

$$\sin\mathrm{A}_z = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

Онда је азимут источног проласка :

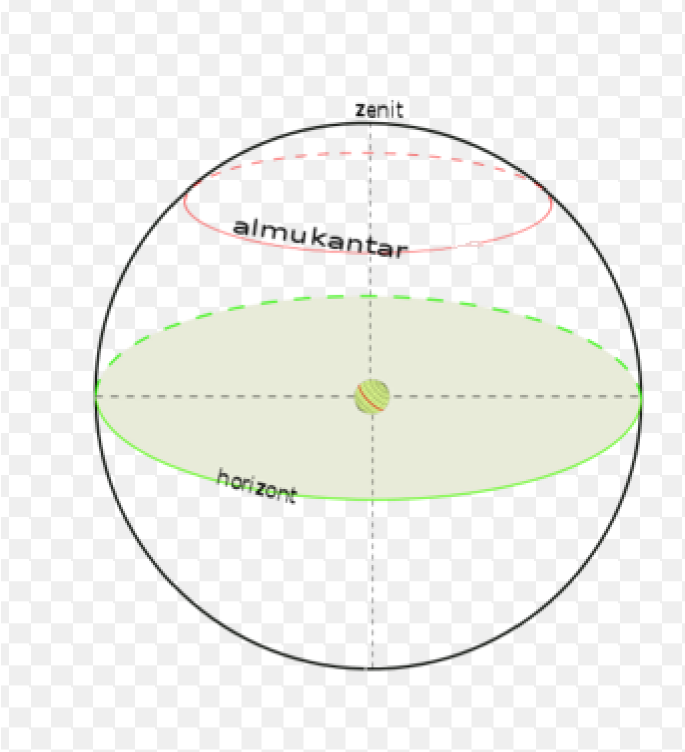
$$\mathrm{A}_I = 360° - \ \mathrm{A}_z$$

Часовни угао се рачуна из израза:

$$cost = \cot(90° - \varphi)cot\delta = tan\varphi cot\delta$$

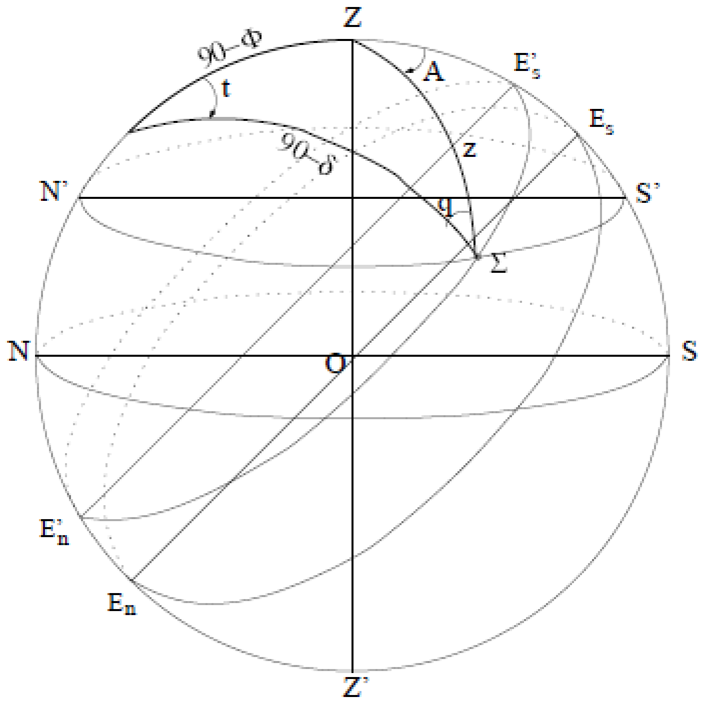
Пролазак тела кроз задати алмукантар

ДЕФИНИЦИЈА1: **Алмукантар** је кружница на небеској сфери која лежи у равни паралелној хоризонтској равни (дакле кружница са константном зенитном даљином). (слика 6.)



Слика 6.

Пролазак кроз алмукантар за задано небеско тело постоји под условом да је:
$z(En') \leq z \leq z(En')$, односно да је зенитна даљина заданог алмукантара између зенитне даљине доње и горње кулминације небеског тела.



Слика 7. Пролазак небеског тела кроз алмукантар.

У том случају часовни угао се може израчунати из :

$$\cos z = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \sin(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)\cos t$$

Одавде се после сређивања добија:

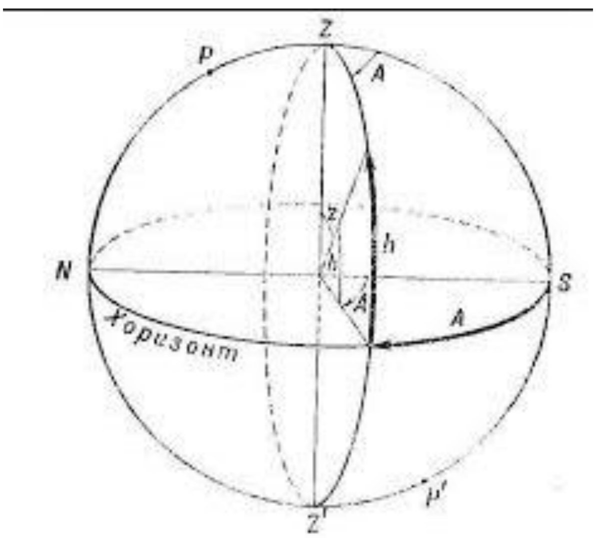
$$cost = \frac{cosz - sin\varphi\ sin\delta}{cos\varphi cos\delta}$$

Азимут се рачуна из једначине:

$$tanA = \frac{sint}{sin\varphi cost - cos\varphi tan\delta}$$

коју смо изводили прилоком транформација координата.

Пролазак небеког тела кроз задати вертикал



Слика 8. Произвољни вертикал.

Решавање сферног троугла када је познат Азимут вертикала кроз који пролази небеско тело може се извести спуштањем висине на вертикал из темена *P* чим се положајни сферни троугао дели на два правоугла сферна троугла. Уколико означимо пресечну тачку висине и вертикала са *H* , остале елементе стандардно. Тада се елементи правоуглог сферног троугла *ZPH* рачунају применом Неперовог правила. Најпре се часовни угао t дели на два угла t_1и t_2 тако да је $t = t_1 + t_2$, а зенитна даљина на два парчета $z = x + y$, па је:

$$tant_1 = \frac{1}{sin\varphi \tan(180° - A_z)}$$

Слично је и :

$$tanx = \frac{\cos(180° - A_z)}{tan\varphi}$$

Као и :

$$\sin h = cos\varphi \sin(180° - A_z)$$

Пошто су, сада, у другом правоуглом сферном троуглу, позната сада два елемента(вештачки направљена висина h и комплемент деклинације), могу се срачунати и :

$$\cos t_2 = tan\delta tanh$$

$$cosy = \frac{sin\delta}{cosh}$$

У зависности од квадранта у коме се налази небеско тело висина може пасти унутар положајног сферног троугла или вани, тако да треба прилагодити ове формуле за све случајеве.

Рачунање паралактичког угла

Ако је сада паралактички угао произвољан тада се он може срачунати уз помоће хоризонтских или екваторских координата. Из хоринтских координата се он рачуна на следећи начин:

Задајемо, најпре две једначине (све рачунамо на западној страни):

(Синусна теорема) $cos\delta sinq = cos\varphi sinA$
(Синусно косинусна теорема) $cos\delta cosq = sinzsin\varphi + coszcos\varphi cosA$

Дељењем прве једначине другом се добија :

$$tanq = \frac{cos\varphi sinA}{sinzsin\varphi + coz\, z \cos\varphi\, cosA}$$

Ако је $cos\delta = 0$ онда смо или у тачки P или у дијаметрално супротној па је паракатички угао у првом случају 0, а у други случај нећемо разматрати.

Како се паралактички угао креће између 0 и 180 степени добили смо га једнозначно.

Покушајте за домаћи да добијете из екваторских координата паралактички угао, а ја ћу одрадити на часу.

Диференцијалне промене положаја

На овом месту ћемо размотрити проблем малих промена координата једног координатног система у функцији координата неког другог система. Биће описане везе између хоризонтских и екваторских координатних прираштаја, као и веза између екваторских и еклиптичих координатних прирашатаја.

Прираштаји Хоризонтских координата

Напишимо најпре косинуску теорему за зенитну даљину у имплицитном облику:

$$F: cosz - sin\varphi\ sin\delta - cos\varphi\ cos\delta\ cost = 0$$

Налажењем тоталног диференцијала те једначине имамо:

$$sinz\ dz = (sin\varphi\ cos\delta\ cost - cos\varphi\ sin\delta)d\varphi + (\cos\varphi\ sin\delta\ cost - \ sin\varphi\ cos\delta)d\delta + \cos\varphi\ cos\delta\ sint\ dt$$

Како је из синусне теореме:

$$cos\delta\ sint = sinz\ sinA$$

Занемаравањем промене $d\varphi$ и $d\delta$ пошто су та два нула када ми мирујемо на земљи онда је:

$$sinz\ dz = cos\varphi\ cos\delta\ sint\ dt = cos\varphi\ sinz\ sinA\ dt$$

Па је одатле скраћивањем у случају $sinz \neq 0$:

$$dz = cos\varphi\ sinA\ dt$$

У Случају $sinz = 0$ положајни троугао се деформише па нисмо ни могли кренути са горњом дискусијом. Овај случај нећемо разматрати.

Последично имамо да су апроксимативне диференцијалне промене зенитне даљине у првом вертикалу:

$$dz = cos\varphi\ dt$$

На главном меридијану је

$$dz = 0$$

Што значи да је орбита небеског тела у околини главног меридијана апроксимативно паралелна хоризонтској равни (пазите само околина!).

Рачунање диференцијалне промене азимута ћемо извести из синусно-косинусне теореме:

$$sinz\cos(180° - A) = \sin(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) - \cos(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)cost$$

$$-sinz\cos A = \cos\varphi\ sin\delta - \sin\varphi\cos\delta cost$$

Тоталним диференцирањем (за вежбу) се добија да је:

$$sinz\ sinA\ dA = \ cosz\ cosA\ dz - (sin\varphi\ sin\delta + \cos\varphi\ cos\ \delta\ cost)d\varphi + (cos\varphi\ cos\delta + sin\varphi\ sin\delta\ cost)d\delta + sin\varphi\ cos\delta\ sint\ dt$$

Пошто су промене $d\varphi$ и $d\delta$ непостојеће када стојимо на истом месту на Земљи(ова друга је увек непромењива то знамо!) онда се ово своди на

$$sinz\ sinA\ dA = \ cosz\ cosA\ dz + sin\varphi\ cos\delta\ sint\ dt$$

Пошто важи да је $cos\delta\ sint = sinz\ sinA$ добијамо да је:

$$sinz\ sinA\ dA = cosz\ cosA\ dz + sin\varphi\ sinz\ sinA\ dt$$

Размотримо још и случај када све може да се скрати:

$$dA = sin\varphi\ dt + cotz\ cotA\ dz$$

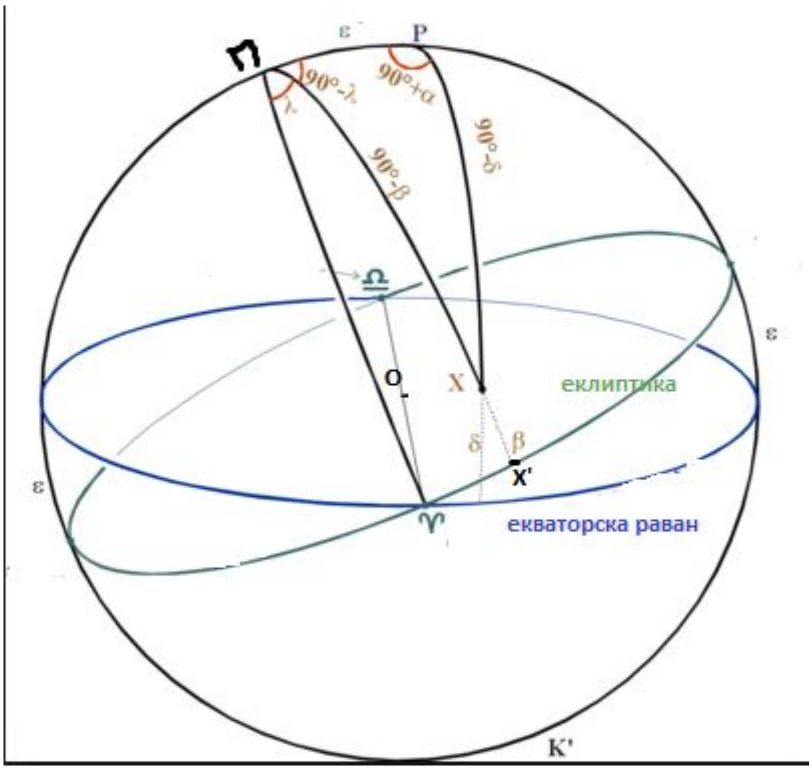
Како је

$$dz = cos\varphi\ sinA\ dt$$

Добијамо

$$dA = (sin\varphi\ + \cos\varphi\ cotz\ cosA\ )dt$$

Диференцијалне релације између небеских екваторских и еклиптичких координата



Слика 9. Небески екваторски и еклиптички координатни систем и еклиптички троугао

На слици 9. видимо еклиптички сферни троугао *XPП* где је *X* положај звезде на небеској сфери, *P* северни пол за наравно оба екваторска система, а *П* северни пол за еклиптички систем. Геометријски се лако види да је лук $\widehat{\Pi P}$ налази на великој кружници чија је раван нормална на правац $O\gamma$ (јер су праве OP , $O\Pi$ обе паралелне на $O\gamma$ по дефиницији) па је $\measuredangle\gamma\Pi P = 90°$. Како је $\measuredangle\gamma\Pi X' = \ \lambda$, онда је

$$\measuredangle X\Pi P = 90° - \ \lambda$$

Дужине лукова $\widehat{XP}$, $\widehat{X\Pi}$ су јасне: прва је $90° - \delta$, друга $90° - \beta$, као и дужина лука $\widehat{\Pi P}$, јер опет се лако геометријски изводи да је тај угао једнак ε. $\measuredangle XP\Pi$ је уствари збир два угла: $\measuredangle XP\Pi = \measuredangle \gamma P\Pi + \measuredangle \gamma PX = 90° + \alpha$. (Слика 9.)

Тако добијамо еклиптички сферни троугао на који примењујемо сферне тригонометријске теореме: синусну, косинусну, синусно – косинусну. Уколико су познате латитуда и лонгитуда, а тражимо ректасцензију и деклинацију онда:

$$\cos(90° - \delta) = \cos(90° - \beta)\cos\varepsilon + \sin(90° - \beta)\, sin\,\varepsilon \cos(90° - \lambda)$$

$$sin\delta = \sin\beta\ \cos\varepsilon + \ cos\beta\ sin\,\varepsilon \sin\lambda$$

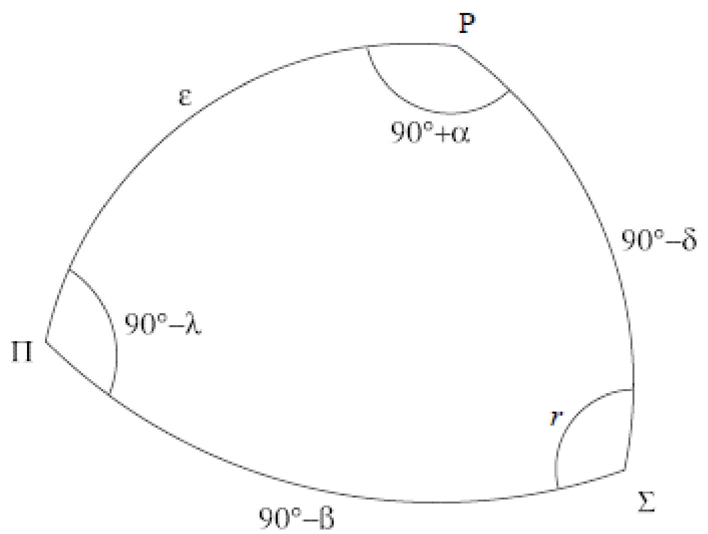
Сада диференцирањем добијамо колико је $d\delta$ у зависности од $d\beta$, $d\lambda$ као и $d\varepsilon$.

Када добијемо δ, сада њега можемо да убацимо и израчунамо и α. То за домаћи. Ово смо уосталом и горе радили у 2. задатку када смо трансформисали координате, тако да погледајте то горе.

Сада диференцирањем добијамо колико је $d\alpha$ у зависности од $d\beta$, $d\lambda, d\varepsilon$ и $d\delta$, а овог последњег смо малопре нашли у зависности од $d\beta, d\lambda$ и $d\varepsilon$.

Тако смо нашли диференцијалну зависност $d\delta$ и $d\alpha$ у односу на $d\beta$, $d\lambda$ и $d\varepsilon$.

Обратно, за домаћи. Узмите у обзир да нам је познат угао *r* на слици 10.



Слика 10. Еклиптички троугао

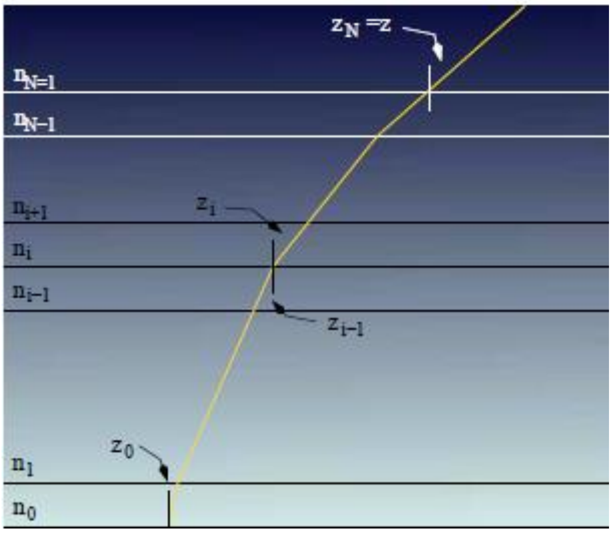
Пети час

Астрономска Рефракција

Земљина атмосфера је састављена од слојева различитих густина. При проласку електромагнетног таласа кроз такву средину, долази до закривљења његове путање. Појава скретања електромагнетног таласа кроз атмосферу зове се **астрономска рефракција**. Појава постоји, како у видљивом делу спектра, тако и у опсегу радио-таласа. Разлика у третирању рефракције у видљивом и радио делу спектра је у томе што, код проучавања рефракције оптичких праваца, највећи утицај има тропосфера, најгушћи атмосферски слој који се простире до висине од свега неколико километара изнад површине Земље. Путања радио-таласа се, међутим, мења приликом проласка кроз јонизујући слој атмосфере (јоносферу) који је на висини од преко 50 километара, па је извођење израза за утицај рефракције радио-таласа, донекле, другачије.

У зависности од потреба за које се врши обрачун утицаја рефракције, можемо посматрати два модела атмосфере.

У првој апроксимацији, сматраћемо да су атмосферски слојеви распоређени у виду планпаралелних појасева (слика 1.), чиме се занемарује утицај закривљености Земље. У прецизнијем тумачењу ове појаве, атмосферу ћемо моделирати по принципу сферносиметричних слојева, чиме формуле постају компликованије, али се тачност тако израчунатих рефракција побољшава. Коначно, с обзиром на локалне атмосферске и гравитационе утицаје, за радове највише тачности користе се таблице рефракција, чији су елементи добијени експерименталним путем.



Слика1. Планпаралелни модел атмосфере.

Равански модел рефракције

Апроксимирајући атмосферу моделом планпаралелних слојева (слика 1.), може се применити закон који повезује индексе преламања различитих слојева са синусима упадних углова зрака:

$$n_i sinz_i = n_{i-1} sinz_{i-1}$$

Овде је:

n_i индекс преламања *i*-тог слоја атмосфере, а

z_i зенитна даљина светлосног зрака који долази на површ слоја *i*.

Индекс преламања опада са повећањем висине изнад површине Земље. Ако индекс преламања атмосферског слоја на површини Земље означимо са n_0 , индекс преламања највишег слоја Земље са n , уз претпоставку да постоји *N* слојева, онда важи релација:

$$n_0 > n_1 > n_2 > \cdots > n_{N-1} > n = 1$$

Развојем следи:

$$n_0 sinz_0 = n_1 sinz_1 = \cdots = n_{N-1} sinz_{N-1} = sinz_n = sinz \quad (1)$$

Као што се може видети из једначине 1, простирање зрака кроз планпаралелне слојеве атмосфере не зависи од начина поделе слојева, па се може написати:

$$n_0 sinz_0 = sinz \ (2)$$

Зенитна даљина z из израза (2) се назива **топоцентричним зенитним одстојањем**, и то представљазенитну даљину на коме би се појавио (светлосни или радио) извор у одсуству атмосфере. Зенитна даљина z_0 је она коју ми меримо са Земље да је има талас. Обележимо угао рефракције са:

$$R = z - z_0 \ (3)$$

Заменом (3) у (2), следи:

$$n_0 sinz_0 = \sin(z_0 + R)$$

$$n_0 sinz_0 = \mathrm{sinz}_0 cosR + sinRcosz_0$$

Под претпоставком да је R величина блиска нули следи да је $cosR \approx 1$, а $sinR \approx R$ добија се коначни израз за угао рефракције:

$$n_0 sinz_0 \approx \mathrm{sinz}_0 + Rcosz_0$$

$$R \approx (n_0 - 1)tanz_0 \ (4)$$

Једна£ина (4) добро апроксимира утицај рефракције за изворе блиске зениту.

У случају већих зенитних одстојања, претпостављање планпаралелних слојева атмосфере доводи до грешке у рачунању рефракције, па се у тим случајевима мора узети у обзир закривљеност Земље. Као што се из (4) може видети, Рефракција зависи само од вредности индекса преламања и зенитног одстојања, оба мерена на површини Земље. За стандардне услове атмосфере, који претпостављају атмосферски притисак од 1013,24 mbar (760 mmHg) и температуру од 0 °C, индекс преламања је:

$$n_0 = 1{,}0002927$$

Усвајањем ове вредности индекса преламања, из (4) можемо израчунати:

$$K = n_0 - 1 = 0{,}0002927 = 0° \; 0' \; 60.4'' \; (5)$$

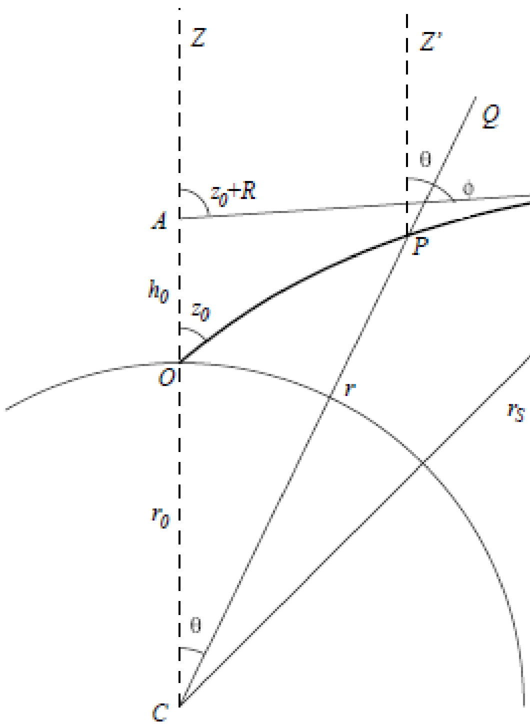
Ова вредност из (5) се назива **константом рефракције**.

Рефракција се добија у лучним секундама, ако се константа рефракције изрази, такоче, у лучним секундама:

$$R = K tan z_0 \; (6)$$

Сферно-симетрични модел атмосфере

У случају када се посматрани извор налази на већим зенитним одстојањима, примена приближне формуле (6) за рефракцију не даје довољно тачне резултате. Стога се уводи модел сферно-симетричне атмосфере (слика 2).



Слика 2. Сферно-симетрични модел атмосфере.

Опажач се налази у тачки O на физичкој површи Земље, на геоцентричној удаљености r_0од центра C. Правац локалног зенита дефнисан је полуправом *CO*. Удаљени извор који је предмет посматрања налази се у тачки S, на геоцентричној удаљености r_s. Путања зрака дефнисана је кривом OPS, где је тачка P произвољна тачка изломљене путање зрака. Повуцимо кроз тачку P геоцентрични вектор и продужимо га до тачке Q у продужетку путање. У тачки P повуцимо полуправу PZ', паралелну са правцем локалног зенита. Ако је угао $\theta = \measuredangle(OCP)$ тада је и ∡(Z'PQ) такође једнак θ; као угао са паралелним крацима. Конструишимо, даље, тангенту на путању зрака, која сече правац локалне вертикале у тачки А, а ∡(ASC) обележимо са ϕ_s. Посматрач у тачки О удаљени извор види под углом z_0 . Зенитно одстојање ослобођено утицаја рефракције је $z = z_0 + R$, а то је оно зенитно одстојање које би измерио посматрач у тачки А, која се налази на правцу локалне вертикале, на висини x_0 изнад тачке О. Обележимо, на крају, угао који допуњава θ до z са ϕ. Уведимо поларне координате тачке P: $d(C, R) = r$ и угао θ па је P = (r, θ). Задатак се своди на решавање једначине:

$\theta = \theta(r)$ што је једначина криве зрака коју дакле треба наћи, и налажења угла ϕ.

Зенитно одстојање је, према слици 2 онда :

$$z_0 + R = z = \theta + \phi$$

Тако да нам је довољно да израчунамо углове θ и ϕ, што нећемо радити јер је поступак сложен, и користи доста диференцијалног рачуна и закона физике за преламање зрака, већ ћемо овде стати. Важно је запамтити како да дођемо до ових углова θ, ϕ, а онда је $R = z - z_0$ где је z стварна зенитна даљина, а z_0 измерена.

Паралакса

Посматрања небеских тела се врше из топоцентра, који се креће услед дневног кретања Земље. Да би се мерења извршена на различитим местима на Земљи могла упоређивати, врше се свођења на геоцентар.

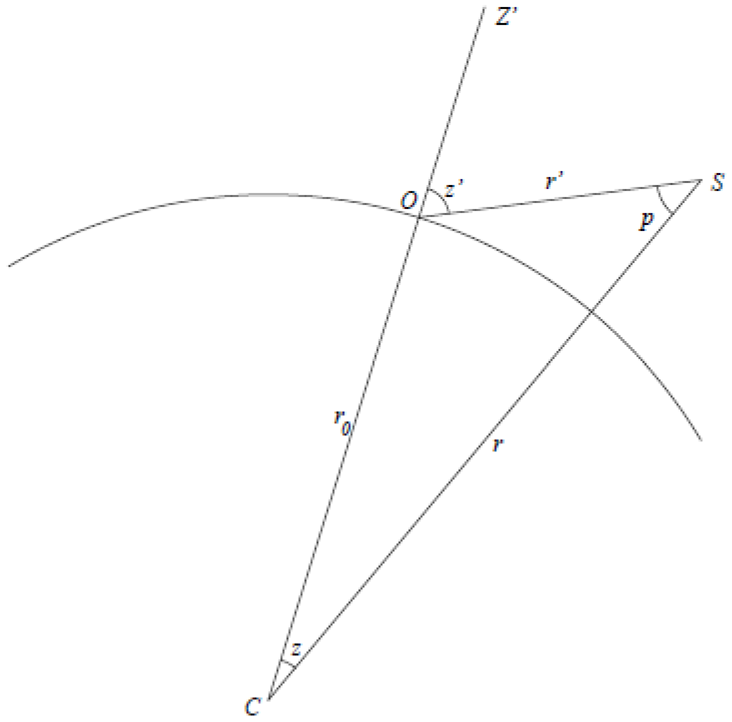
Међутим, због кретања геоцентра, усваја се барицентар Сунчевог система као почетак инерцијалног

координатног система. Када смо радили координатне системе имали смо ситуацију да поистоветимо топоцентар, геоцентар и хелиоцентар. То може скоро увек осим за небеска тела у Сунчевом систему, јер тада су небеска тела сувише близу топоцентру(посматрачу), центру Земље(геоцентар) и центру Сунца (хелиоцентар) и доста је непрецизно упоређивање хоризонтских координата са екваторским и еклиптичким уколико поистоветимо та три центра. Због тога вршимо обрачун и разликујемо координате различитих координатних система у зависности од центра који смо узели.

Паралакса се дефинише као угао под којим се види неки објекат. Из претходног параграфа, закључује се да се утицај паралаксе може поделити на два дела: (1) геоцентричну паралаксу, која се обрачунава током свођења мерења са топоцентра на геоцентар и (2) годишњу паралаксу, којом се мерења са геоцентра своде на барицентар.

За геоцентричну паралаксу се у литератури често среће и назив дневна паралакса.

Геоцентрична паралакса



Слика3.

Посматрајмо слику 3. и уочимо на њој тачку топоцентар у тачки О. Ако је С геоцентар, тада је полуправа CZ' правац локалног зенита. Геоцентрични радијус вектор топоцентра је r_0 . Удаљени извор се налази у тачки S, чији је геоцентрични радијус вектор r. Посматрач у топоцентру мери зенитно одстојање z' у односу на геоцентрични зенит Z' . Означимо дуж CO са r_0. Угао z се формално назива геоцентричним зенитним одстојањем. Тада се **угао p** назива **геоцентричном паралаксом**. Са слике се уочава идентитет:

$$z' = z + p$$

(z' је спољни угао трогла COS па је као такав једнак збиру два угла у троуглу који нису његов суплемент).

Та£ке O, C и S се налазе у истој равни, која не представља раван месног меридијана. Применимо на

троугао COS синусну једначину за равански троугао:

$$\frac{sinp}{r_0} = \frac{\sin(180° - z')}{r} = \frac{sinz}{r'}$$

Одавде се после сређивања добија:

$$sinp = \frac{r_0}{r} sinz' = \frac{r_0}{r'} sinz \quad (1)$$

Анализом претходне једначине може се уочити да паралакса *p* расте са повећањем геоцентричне зенитне даљине z’, као и да је за удаљеније изворе износ паралаксе мањи. Такође, пошто је троугао COS равански , геоцентрична паралакса не утиче на азимут извора светлости.

Треба напоменути да се геоцентрична паралакса не обрачунава за изворе изван Сунчевог система, пошто има занемарљив износ (0,00003’’) у односу на тачност мерења (варира од 0,5’’ до 0,01’’ у зависности од потребе). С друге стране, за изворе у Сунчевом систему, геоцентрична паралакса има знатан утицај и обавезно се узима у обзир.

Шести час

Годишња паралакса

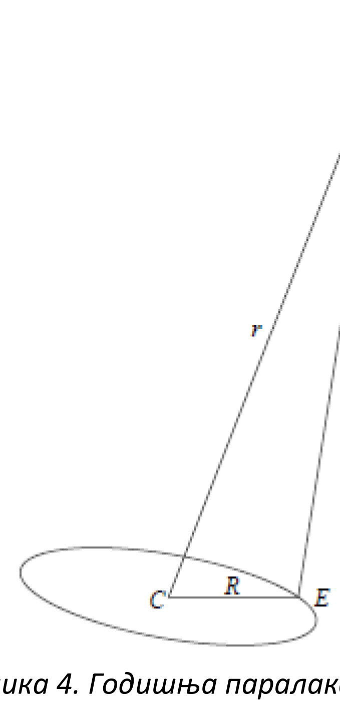
Нека је (слика 4.) са тачком C означен барицентар Сунчевог система, тачком E произвољни положај Земље на путу око Сунца и тачком X удаљени извор чију годишњу паралаксу треба израчунати. Барицентричну дужину радијус вектора Земље означимо са R, барицентричну дужину радијус-вектора удаљеног извора Светлости са r, а његову геоцентричну дужину радијус-вектора са r'.

Елонгација извора светлости у односу на Сунце је угао код темена E у раванском троуглу CEX. Примењујући синусну једначину, следи:

$$\frac{sin\pi}{R} = \frac{sinE}{r} \ (2)$$

Ако мерења пребацимо на астрономске јединице добијамо да је:

$$sin\pi = \frac{sinE}{r} \ (3)$$



Slika 4. Годишња паралакса

где се барицентрични радијус-вектор извора r изражава у астрономским јединицама, што одговара томе да је R = 1. Израз (3) се користи за мерење годишње паралксе свих небеских тела.Сада ћемо претпоставити додатно да паралаксу меримо у положају небеског тела тако да је елонгација извора светлости у односу на Сунце E = 90° (дакле, ово је само претпоставка, не мора да буде реална ствар) имамо да је:

$$sin\pi = \frac{1}{r} \; (4)$$

Било која звезда је релативно далеко од Земље и Сунца па је годишња паракса доста мала, па се са довољном тачношћу за звезду може написати да је:

$$\pi = \frac{1}{r} \; (5)$$

Практична јединица за исказивање великих растојања зове се **парсек** и одговара паралакси од једне лучне секунде из једначине (5) када смо у ситуацији E=90° . Израчунајмо колико је 1 парсек у астромским јединицама (1 AJ је растојање Земље од Сунца).

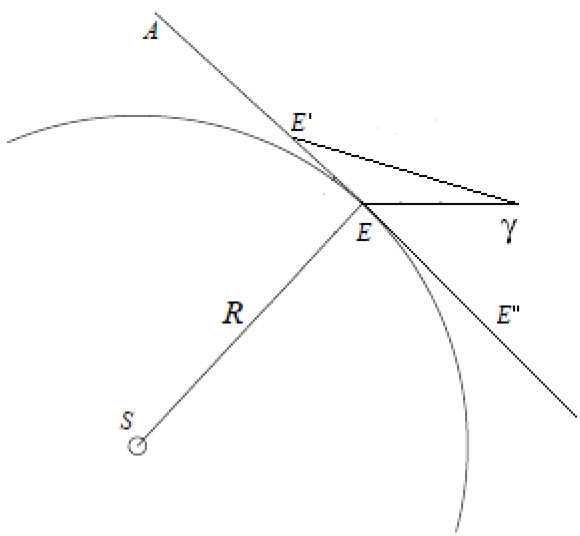
$$1pc = \frac{1}{1''} AJ = \frac{1}{\frac{1}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}} AJ = \frac{648\,000}{\pi} AJ = 206\,264.81\;AJ$$

Аберација

Настаје због ротације Земље око Сунца и због ротације Земље око своје осе као и због коначне брзине светлости. Постоје две врсте аберације: **годишња и дневна аберација**. Прва је последица ротације Земље око Сунца, а друга ротације Земље око своје осе.

Годишња аберација

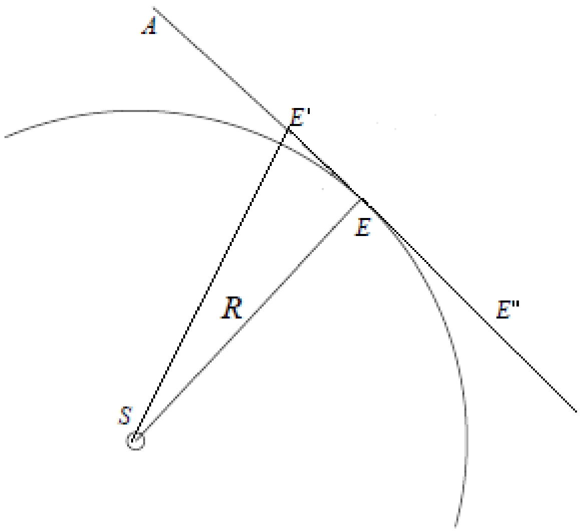
ДЕФИНИЦИЈА1: Тачка на небеској сфери према којој се креће Земља зове се **апекс (A)**.



Слика 1. Модел годишње аберације

На слици 1. је дат модел годишње аберације. Нека је наш положај такав да смо на правој SE са супротне стране од Сунца у односу на центар Земље. Означимо са E наш тренутни положај, са E' наш приближан (тангентан) положај након неког времена t. Тај правац се због нашег положаја поклапа са тангентним правцем Земљиног кретања. Означимо још са E'' наш тангентан положај у блиској прошлости. Посматрајмо троугао $\gamma \mathrm{EE}'$. Да бисмо телескопом посматрали небеско тело γ са места које је на правој SE са супротне стране од Сунца у односу на центар Земље потребно је да нагнемо телескоп за угао $\sphericalangle(E''E\gamma)$, а после времена t, Земља долази у положај E', па да бисмо то исто тело кроз телескоп видели тачно онако као и код првог посматрања потребно је нагнути телескоп за угао $\sphericalangle(EE'\gamma)$. Дакле, небеско тело је променило свој положај на небу. Угао $\sphericalangle(E\gamma E')$ се назива **аберациони угао**. Аналогно се ради за било који други наш положај на Земљи. Аберациони угао је заправо мала вредност и мери се у лучним секундама.

Израчунајмо сада једну специјалну аберацију. То је аберација при посматрању Сунца или сваког другог тела за које је угао $\sphericalangle(E\gamma E') = 90°$. Што се тиче Сунца, претпоставимо да смо у положају тако да смо на правој SE и окренути ка Сунцу (Слика 2.).



Слика2.

Нека је t време потребно светлости да стигне у положај E. Тада је дужина странице троугла CEE' једнака ct, где је c брзина светлости. За исто то време је Земља брзином $v = 29.8km/s$ прешла пут vt, што је једнако дужини странице EE'. Угао $\sphericalangle ESE'$ је угао који тражимо. За њега би израз био:

$$tan\sphericalangle(ESE') = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{29.8km/s}{299\ 792km/s} = 0{,}000099402$$

Одатле прерачунавањем добијамо да је приближна вредност угла $\sphericalangle(ESE') = 20{,}5''$. Ову вредност називамо **константа аберације**. Иначе је због неконстанте Земљине брзине ротације око Сунца (из Кеплерових закона) ова вредност заправо неконстанта и креће се између $20''$ и $21''$.

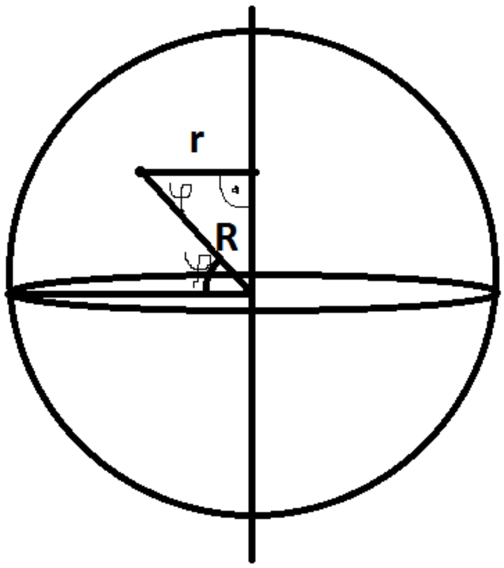
Дневна аберација

Овде такође имамо апекс, односно тачку на небеској сфери ка којој се Земља креће, с тим је сада то кретање услед ротације Земље око своје осе и то је источна тачка на хоризонту.

С обзиром на то да брзина ротације Земље у неком месту зависи од његове географске ширине, и константа дневне аберације (што је аберација било ког небеског тела чији правац светлосног зрака нормалан на правац ротације Земље, односно правац запад-исток) зависиће од географске ширине. Како је на Северном и Јужном географском полу Земље брзина ротације Земље једнака нули, следи да је и аберација једнака нули. Израчунајмо константу аберације на екватору. Слично као кад смо рачунали константу годишње аберације (правац Сунце-Земља којим долази светлосни зрак нормалан је на правац кретања Земље услед ротације око Сунца), имамо правоугли троугао чија је једна катета vt ($v = 465{,}1 m/s$ је сада брзина ротације Земље на екватору) што представља пут који то место пређе услед ротације за време t, а друга катета је ct што представља пут који светлост пређе за време t. Ако је k константа аберације, следи да је

$$\tan k = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{465{,}1 m/s}{299\,792 km/s} = 0{,}0000015514$$

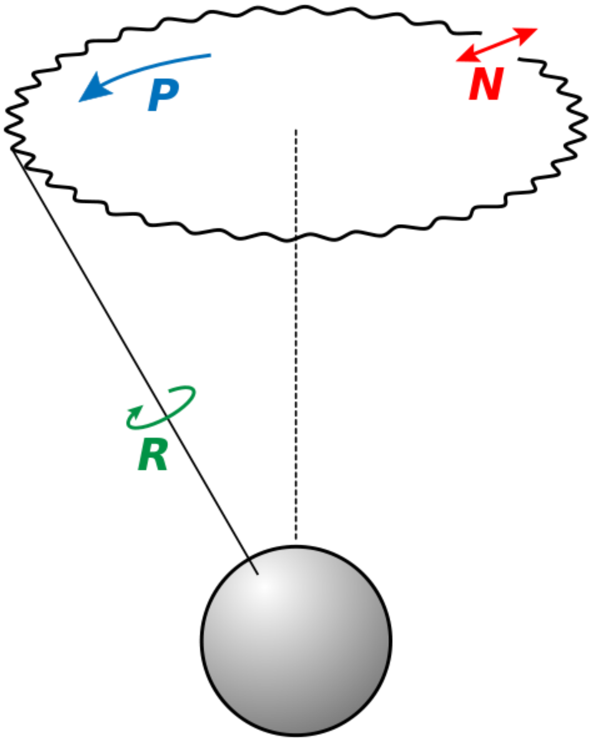
односно $k = 0{,}32''$.



Нека је сада k' константа аберације у месту с географском ширином φ. Угаона брзина ротације Земље је константа, а линијска брзина линеарно зависи од растојања од осе ротације. На екватору је растојање једнако полупречнику Земље R, а у месту с географском ширином φ растојање је r. Из $\cos\varphi = \frac{r}{R}$ следи да је $r = R\cos\varphi$, па је $v' = v\cos\varphi$. Следи да је $\tan k' = \frac{v'}{c} = \frac{v}{c}\cos\varphi = \tan k \cos\varphi$. Како су k, k' јако мали бројеви, можемо извршити апроксимације $\tan k \approx k$ и $\tan k' \approx k'$ (ако се изрази у радијанима) и добијамо да је $k' = k\cos\varphi$ (сада се k, k' могу поново изразити у степенима, тј. у лучним секундама).

Прецесија и нутација

Прецесија и нутација су појаве до којих долази услед тога што Земља није идеално сферног облика, као и сталног гравитационог дејства Сунца и Месеца. Прецесија и нутација представљају померање Земљине осе ротације и промену положаја екватора и еклиптике. Прецесија представља ротационо кретање Земљине осе ротације, а нутација представља њено осциловање током тог ротационог кретања. Земљина оса ротације начини пун круг за период од приближно 25700 година (платонска година) и то је период прецесија, док је период њеног осцилаторног кретања 18,7 година.



Појава прецесије је била позната још у Старој Грчкој. Открио ју је астроном Хипарх мерећи дужину тропске године и упоређујући је са подацима од пре 150 година. За дужину тропске године добијао је вредности за око $22'$ мање од оних пре 150 година. На основу измењених положаја звезда приметио је да се они разликују од претходних. Из тога је извео закључак да се тачка пролећне равнодневице помера по еклиптици према Сунцу, због чега је појаву назвао прецесијом, што значи предњачење.

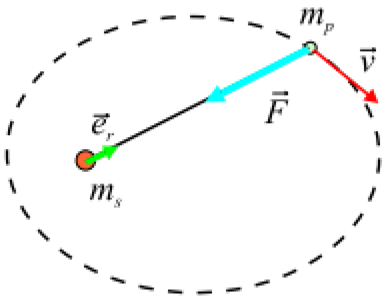
Седми час

Кретање тела у централном пољу сила. Проблем два тела.

Кретање планета око Сунца, се описује Њутновим законом гравитације:

$$\vec{F} = -G\frac{m_p m_s}{r^2}\overrightarrow{e_r} \quad (1)$$

у коме је вектор $\overrightarrow{e_r}$ јединични вектор чији је почетак везан за Сунце а усмерен је ка тренутном положају планете, G је Њутнова универзална гравитациона константа, m_p и m_s су масе планете и сунца, респективно и то узимамо да су константе.



Слика 1: Сила гравитације је овде означена светло плавом бојом

Овај закон (као и Кулонов који описује деловање наелектрисаних честица) описује деловање тела преко централних сила, односно преко одговарајућих централних поља. Централно поље сила је такво поље у коме је правац деловања силе на честицу, у свакој тачки поља усмерен ка једној тачки О или од ње, и та тачка се назива центар поља, при чему интензитет силе зависи само од растојања од тог центра.

Централно поље сила

На основу горе реченога уопштимо ствар, тако што ћемо да дефинишемо израз за силу која спада у централне у следећем облику:

$$\vec{F} = f(r)\overrightarrow{e_r}$$

где је

$$\overrightarrow{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

јединични вектор вектора положаја $\vec{r}$, а $f(r)$ је пројекција вектора силе на правац радијус вектора. Кажемо да је таква сила **одбојна**, уколико је функција f позитивна, а **привлачна** ако је f негативна. Приликом писања претходне једначине је узето у обзир да се координатни почетак налази у тачки О односно у центру поља (у Сунчевом систему је то у близини центра Сунца).

Дефиниција1 : **Момент силе ($\overrightarrow{\boldsymbol{M}}$)** се дефинише као следећи векторски производ:

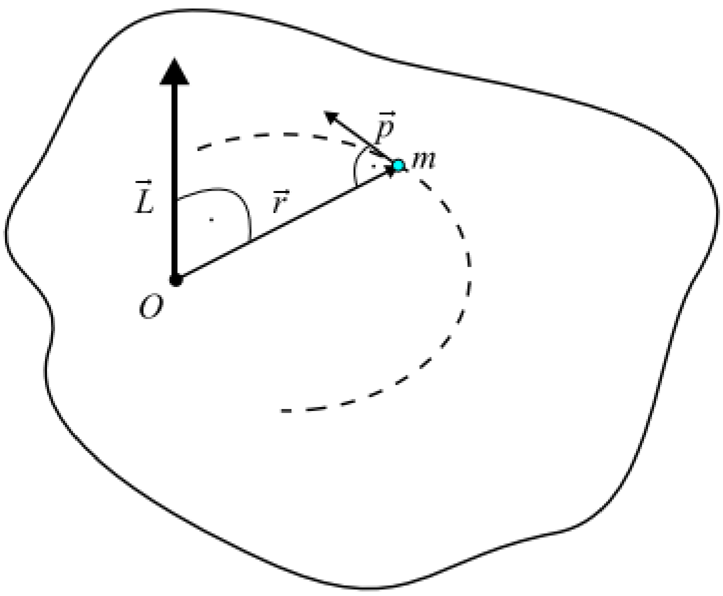
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Дефиниција2: **Момент импулса($\vec{L}$)** се дефинише као следећи векторски производ:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Овде је $\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}$ импулс тела, а $\vec{v}$ вектор брзине тела. С обзиром да важи Други Њутнов закон $\vec{F} = m\vec{a}$ и како је $\vec{v} = \int \vec{a}\ dt$, добијамо следећи закључак:

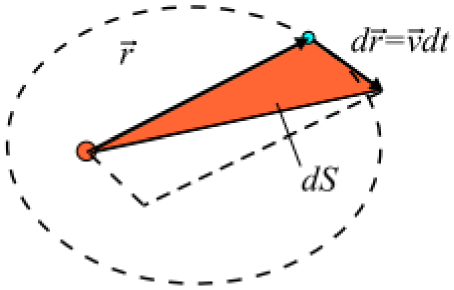
Момент, М , сваке централне силе у односу на тачку О је очигледно једнак нули. Одатле следи да се момент импулса честице, која се креће у пољу централне силе не мења током времена.



Слика2.

Вектор $\vec{L}$ је обзиром на своју дефиницију, у сваком моменту времена ортогоналан на раван коју образују вектори $\vec{r}$ и $\vec{p}$ (као њихов векторски производ Слика2.). Како је осим тога момент импулса константан током времена та раван, у односу на коју се он налази под правим углом, је фиксна. На тај начин, при кретању у пољу централне силе, вектор положаја честице лежи стално у истој равни. У тој истој равни лежи и вектор импулса честице. Последица ових чињеница је да је трајекторија честице крива у равни, која задржава стално исту оријентацију у простору, при чему та раван пролази кроз центар поља.

Овај резултат има интересантну геометријску интерпретацију. Вектор положаја честице $\vec{r}$ за време dt пређе преко површине dS . Та површина је једнака половини површине паралелограма конструисаног над векторима $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, односно (Слика 3.)



Слика 3.

$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \overrightarrow{dr}\right|$$

Како је померај честице за време dt једнак $\overrightarrow{dr} = \vec{v}\,dt$, добија се

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}\ x\ \vec{v}\ dt| = \frac{1}{2}|\vec{r}\ x\ \vec{v}\ |dt = \frac{L}{2m}dt$$

где је L интензитет вектора момента импулса честице масе m, при чему је, како смо то видели, код кретања у централном пољу то константа. На основу овога се може закључити да вектор положаја честице која се креће у централном пољу за једнаке временске интервале прелази једнаке површине, другим речима, величина која се назива секторска брзина и означава са $\frac{dS}{dt}$ је у овом случају костантна јер је :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const$$

Проблем два тела

Оно што се у физици назива проблемом два тела се односи на описивање кретања две интерагујуће честице при чему се претпоставља да је тај систем затворен, што значи да нема спољашњих сила које дејствују на тај систем од два тела или је резултанта спољашњих сила једнака нули. Циљ је цео проблем свести на израз за једну честицу што ћемо овде и урадити. Овим се и добија основа за израз (1) са почетка часа (уз неке додатне рачуне). Докажимо најпре следећу теорему:

ТЕОРЕМА О КРЕТАЊУ ЦЕНТРА МАСЕ

Центар масе или центар инерције система материјалних тачака, маса $m_1, m_2 \dots m_N$, чији су положаји, у односу на неки референтни систем, одређени векторима положаја $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2} \dots \overrightarrow{r_N}$, је замишљена тачка чији је вектор положаја одређен релацијом

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + \cdots + m_N\overrightarrow{r_N}}{m_1 + m_2 + \cdots m_N} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{r_i}$$

где је $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ укупна маса система. Ако се овај израз продиференцира по времену и помножи масом система, добија се

.

$$m\overrightarrow{v_{CM}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + m_N\overrightarrow{v_N} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_{tot}}$$

где је са $\overrightarrow{v_{CM}}$ означена брзина центра маса система , $\overrightarrow{v_i}$ брзине честица, а $\overrightarrow{p_i}$ одговарајући **импулси**, а $\overrightarrow{p_{tot}}$ укупан импулс система. Према томе $\overrightarrow{p_{CM}}$, односно импулс центра масе је једнак збиру импулса свих честица у систему.

Ако се сада диференцира претходна једначина по времену добија се:

$$m\overrightarrow{a_{CM}} = m\frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\overrightarrow{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{a_i} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}$$

где се на десној страни релације налазе резултујуће силе које делују на одговарајуће честице система (нпр. са F_1 је означена резултујућа сила која делује на прву честицу, итд.). Те силе се могу поделити на унутрашње (које потичу од интераговања посматране честице са осталим честицама система) и спољашње (које потичу од интераговања честица система са телима која не припадају њему), па тако на пример на прву честицу система делује резултујућа сила:

$$\vec{F}_1 = \overrightarrow{F_{1un}} + \overrightarrow{F_{1sp}}$$

Ово значи да се претходна једначина може записати као:

$$m\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_{iun}} + \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_{isp}}$$

Како унутрашња сила која делује нпр. на прву честицу у принципу може да потиче од свих преосталих честица она се онда може записати као збир

$$\overrightarrow{F_{1un}} = \sum_{k\neq 1}\overrightarrow{F_{1k}}$$

па је укупна сила која делује на њу:

$$\sum_{k\neq 1}\overrightarrow{F_{1k}} + \overrightarrow{F_{1sp}}$$

док је укупна сила која делује на *i*-ту честицу

$$\sum_{k\neq i}\overrightarrow{F_{ik}} + \overrightarrow{F_{isp}}$$

где је са $\overrightarrow{F_{ik}}$ означена сила којом на *i*-ту честицу делује *k*-та. Аналогно томе је $\overrightarrow{F_{ki}}$ сила којом на *k*-ту честицу делује *i*-та. Према трећем Њутновом закону ове силе су истог интензитета и правца а разликују се само по смеру, односно за њих важи $\overrightarrow{F_{ik}} + \overrightarrow{F_{ki}} = 0$. Важно је уочити да свака од унутрашњих сила (”акција”) у претходним изразима има свој пар (”реакцију”). Сада је:

$$m\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{iun}} + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{isp}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{isp}} = \vec{F}$$

у коме је са $\vec{F}$ означена резултанта свих спољашњих сила. Другим речима производ укупне масе система и убрзања центра маса једнак је резултанти спољашних сила. Упореди ли се овај исказ са II Њутновим законом за једну честицу, можемо да приметимо следеће: Центар масе система се креће као материјална тачка, чија маса је једнака укупној маси целог система, под дејством силе која је једнака збиру свих спољашњих сила које делују на систем. Овај исказ представља теорему о кретању центра маса.

Вратимо се сада на проблем два тела. Дакле, претпоставља се да у том проблему нема спољашњих сила које дејствују на тај систем од два тела или је резултанта спољашњих сила једнака нули. Стога центар маса система или мирује или се креће константном брзином и то праволинијски.

ДЕФИНИЦИЈА1: Ако се честица креће равномерно праволинијски или мирује уводи се њен сопствени **инерцијални систем.** То је координатни систем у којем се та честица стално налази у нултој тачки. Ако тачка има убрзање њен координатни систем је **неинерцијални** и не користи се као валидан координатни систем за анализу понашања неког система честица.

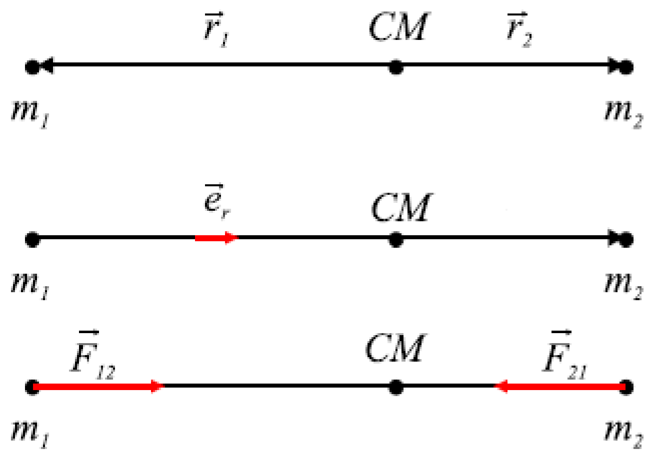
Означимо координатни систем центра масе два тела са *CM*.

Тада је у том систему:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} = 0$$

Одатле је :

$$m_1\overrightarrow{r_1} = -m_2\overrightarrow{r_2}$$



Слика4.

Уведемо ли вектор релативног положаја друге честице у односу на прву:

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

решавањем једначине вектора положаја добија се:

$$\vec{r_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Пошто нема утицаја спољашњих сила, имамо само унутрашње силе које делују на сваку честицу понаособ. Према анализи из Теореме о кретању центра масе имамо сада да је сила којом друга честица масе m_2 дејствује на прву масе m_1 једнака $\overrightarrow{F_{12}}$. Аналогно, сила којом прва честица масе m_1 дејствује на другу масе m_2 једнака $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$. Ове силе спадају у централне, јер се може писати (уз претпоставку да интеракција зависи само од растојања)(слика 4):

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} = f(r)\overrightarrow{e_r}$$

Односно:

$$\overrightarrow{F_{12}} = m_1\ddot{\vec{r_1}} = f(r)\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{F_{21}} = m_2\ddot{\vec{r_2}} = -f(r)\overrightarrow{e_r}$$

Одатле је :

$$\ddot{\vec{r_1}} = \frac{f(r)\overrightarrow{e_r}}{m_1}$$

$$\ddot{\vec{r_2}} = -\frac{f(r)\overrightarrow{e_r}}{m_2}$$

Такође је:

$$\ddot{\vec{r}} = (\vec{r_2} \ddot{-} \vec{r_1}) = \ddot{\vec{r_2}} - \ddot{\vec{r_1}} = -\frac{f(r)\overrightarrow{e_r}}{m_2} - \frac{f(r)\overrightarrow{e_r}}{m_1} = -\frac{(m_1 + m_2)f(r)\overrightarrow{e_r}}{m_1 m_2}$$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\ddot{\vec{r}} = -f(r)\overrightarrow{e_r}$$

Овим је решен проблем два тела.

Владимир Јаковљевић.