1 ПРОСТОР МИНКОВСКОГ

1.1 Простор Минковског. Појам Лоренцове трансформације. Лоренцове трансформације на векторима и дуалним векторима.

На самом почетку увешћемо координатни систем (t, x, y, z) на следећи начин. (x, y, z) су стандардне просторне координате, односно Декартов систем координата. Прва координата означава време и та координата се мења на следећи начин. Ако путујемо у (x, y, z) систему од тачке A до тачке B константном брзином праволинијски, време које је протекло током тог пута је исто као када би кренули од тачке B до тачке A и путовали на исти начин.
Дефиниција 1: Инерцијални систем је (t, x, y, z) систем чији се координатни систем креће константном брзином праволинијски или мирује.
Можемо закључити да претходни систем јесте инерцијални систем.
Дефинишемо догађај у времену и простору као јединствену тачку (t_0, x_0, y_0, z_0).
Онда за почетак без икакве мотивације уведимо временско просторни интервал између два догађаја:

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \qquad (1)$$

Приметимо да претходни израз може бити 0 за више догађаја. Овде је c неки корективна константа која регулише да нам мерна јединица са десне стране буде дужина, односно c је нека брзина. Битна ствар је да c мора да буде такво да се при промени координата не мења дужински елемент. Касније ће се испоставити да је то брзина светлости. Ако уведемо координатни систем (t', x', y', z') мора да важи:

$$s^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \qquad (2)$$

Специјална теорија релативности се може изучавати методама диференцијалне геометрије на простору Минковског који је диференцијална

многострукост са одређеном структуром. Координатне трансформације које смо имплицинтно дефинисали су у неком смислу ротације времена и простора, што ћемо мало размотрити сада.
Дефиниција 2: Векторско поље на простору Минковског (као и на свакој другој многострукости) је следеће прескикавање:

$$M \to \mathbb{R}^4$$

где је M простор Минковског,а 4 је његова димезија.
У свакој тачки p диференцијалне многострукости, самим тим и простора Минковског можемо дефинисати тангенти простор $T_p \cong R^n$.
Дефиниција 3: Скуп свих тангентних простора на многострукости се назива тангентно раслојење $T(M)$.
Нека је у свакој тачки простора Минковског постављена база тангентног простора $\hat{e}_\mu(p)$, где је $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Можемо рећи да је свака база адаптирана координатном систему x^μ.Уведимо погодну нотацију за координате. Просторне координате ћемо означавати са латиничним словима, на пример словом $k \in \{1, 2, 3\}$, док временско-просторне означавамо грчким словима, на пример словом $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ (што не значи да неће бити коришћена и друга слова)да направимо разлику у сумирању. Нулта координата означаваће време. Дакле, имамо следеће:

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

Запишимо сада израз (1) у нешто компактнијем облику:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ову матрицу која је уједно и тензор (овај појам уводимо касније) ћемо звати метрика. Сада смо добили лепу формулу:

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \qquad (3)$$

Желимо да одредимо трансформације које задовољавају формулу (2). Једна од њих је транслација:

$$x^{\mu} \to x^{\mu} + a^{\mu}$$

где је a^{μ} уређена четворка реланих бројева. Испоставља се (што нећемо овде доказивати) да једине врсте трансформација могу бити линеарне:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^{\nu}$$

или конвенционо записано:

$$x' = \Lambda x$$

Стога је:

$$s^2 = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') = (\Delta x) \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x)$$

Добијамо да мора да важи:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

односно:

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu'}{}_{\rho} \Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'} \qquad (4)$$

Дефиниција 4: Трансформације (4) се називају Лоренцове трансформације, а одговарајућа група Лоренцова група.
Лоренцова трансформација очигледно личи на ортогоналну трансформацију за знамо коју важи:

$$1 = R^T 1 R$$

осим што имамо код првг фактора промењен знак у односу на преостала три. Постоји одређена подела Лоренцових трансформација[1],а ми ћемо овде навести само неке представнике. Први представник би био класе неке врсте ротација у простору, као што је на пример:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Такође постоје и пресликавања која се називају бустови која ротирају правце простора и времена. Један од представника је следећа матрица:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Лоренцова група није Абелова, односно ове трансформације не комутирају. Скуп свих транслација и Лоренцових трансформација ће бити група која се назива Поенкареова група и то је скуп који смо тражили: скуп трансфромација које (1) остављају инваријантним.
Размотримо сада бустове експлицитно:

$$t' = t\cosh(\theta) - x\sinh(\theta) \tag{5}$$

$$x' = -t\cosh(\theta) + x\sinh(\theta) \tag{6}$$

Приметимо да се тачка која има координату $x' = 0$ има брзину у x правцу:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \tanh(\theta)$$

Дакле, $\theta = \tanh^{-1} v$. Враћањем у (5) и (6) добијамо да је:

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{7}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{8}$$

где је $\gamma = \frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}$. Добили смо оно што је познато па тиме закључујемо да је наш модел добар. Надаље се у СТР објашњавају уз помоћ оваквих трансформација дилатација времена, контакција простора и тако даље.

Узмимо сада једну тачку p простора Минковског и посматрајмо тангентни простор T_p у тој тачки. Нека је база тог простора дата са $\hat{e}_\mu$. Можемо узети базу која је адаптирана координатном систему x^μ што значи да на пример вектор је $\hat{e}_1$ у правцу x^1 осе(ову могућност у простору Минковског који је врло сличан Еуклидском простору једноставно разумети). Сваки вектор А из оваквог тангентног простора се онда може записати:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu$$

Стандардан пример оваквог вектора је тангентни вектор на криву у простору Минковског (а, и уопште на било коју другу многострукост). Уколико је задана крива $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ Тангентни вектор на ту криву у тачки p има компоненте:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}(p)$$

При Лоренцовим трансформацијама параметар λ се не мења, а мењају се координате на већ описани начин. Тако да имамо:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu V^\nu$$

Вектор је, наравно инваријантан у односу на координатне трансформације. Стога је:

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu = V^{\nu'} \hat{e}_{\nu'} = \Lambda^{\nu'}{}_\mu V^\mu \hat{e}_{\nu'}$$

Ова једнакост важи за све V^μ тако да имамо да је :

$$\hat{e}_\mu = \Lambda^{\nu'}{}_\mu \hat{e}_{\nu'} \qquad (9)$$

Дакле, добијамо познату ствар из линеарне алгебре да се нови базни вектори добијају инверзном матрицом матрице $\Lambda^{\nu'}{}_\mu$. Инверз Лоренцове матрице је такође Лоренцова трансформација(рекли смо да је скуп свих Лоренцових трансформација група) и њу ћемо обележити на следећи начин:

$$(\Lambda^{-1})^{\nu'}{}_\mu = \Lambda_{\nu'}{}^\mu$$

Пошто је ово инверзна матрица важи:

$$\Lambda_{\nu'}{}^\mu \Lambda^{\sigma'}{}_\mu = \delta_{\nu'}{}^{\sigma'} \qquad\qquad \Lambda_{\nu'}{}^\mu \Lambda^{\nu'}{}_\rho = \delta_\rho{}^\mu$$

Из (9) добијамо:

$$\hat{e}_{\nu'} = \Lambda_\nu{}^\mu \hat{e}_\mu \qquad (10)$$

Сада, скуп базних вектора се трансформише уз помоћ инверзне Лоренцове трансформације којом се трансформишу координате.
Стога ћемо дефинисати дуални векторски простор.
Дефиниција 5: Дуални простор у тачки p на многострукости (обележава се са $T^*{}_p$) је простор свих линеарних функционала следећег облика:

$$w : T_p \to \mathbb{R}$$

База дуалног простора се може одабрати тако да важи:

$$\hat{\theta}^{\nu}(\hat{e}_{\mu}) = \delta^{\nu}_{\mu}$$

Било који дуални вектор се може записати координатно:

$$w = w_{\mu}\hat{\theta}^{\mu}$$

Аналогно векторима, често са w_{μ} означавамо дуални вектор. Ако и дуални вектор и вектор пишемо координатно имамо да важи:

$$w(V) = w_{\nu}V^{\mu}\hat{\theta}^{\nu}(\hat{e}_{\mu}) = w_{\nu}V^{\mu}\delta^{\nu}_{\mu} = w_{\mu}V^{\mu}$$

Стога је дуални простор дуалног простора тај исти простор. Напоменимо и то да скаларом сматрамо величину без индекаса.
На аналоган начин као и за векторе изводимо за дуалне векторе следеће формуле:

$$w_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\nu} w_{\nu}$$
$$\hat{\theta}^{\rho'} = \Lambda^{\rho}{}_{\sigma}\hat{\theta}^{\rho}$$

Ово је нешто што смо и могли да очекујемо: координате дуалног вектора се трансформишу Лоренцовим трансформацијама инверзном Лоренцовом матрицом у односу на координате вектора, за исту трансформацију.
Исто важи и за базне векторе. Приметимо да ово значи да скалари остају инваријантни у односу на Лоренцове трансформације.
Наведимо и један пример дуалног вектора у време-простору. Ако је дата скаларна функција ϕ онда се њен диференцијал који је дуални вектор може дефинисати као:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\hat{\theta}^{\mu}$$

При координатној трансформацији имамо и ланчано правило:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}$$

Наравно, формула важи ако вршимо Лоренцову координатну трансформацију.
Скраћеница за парцијални извод коју ћемо користити је:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}\phi$$

Дуални вектори се називају и диференцијалним формама.

1.2 Тензори. Лоренцове трансформације тензора. Основне операције.

Уведимо уопштење вектора и дуалних вектора.
Дефиниција 6: Тензором ранга (k, l) називамо полилинеарно пресликавање дефинисано на следећи начин:

$$T : T^*{}_p \times T^*{}_p \times ...T_p \times ... \times T_p \to \mathbb{R}$$

где је $T^*{}_p$ наведен k пута, а T_p l пута.
Полилинерано значи да је линеарно по сваком аргументу, односно, на пример за $(1, 1)$ тензор имамо да је :

$$T(a\mu + b\nu, cV + dW) = acT(\mu, V) + adT(\mu, W) + bcT(\nu, V) + bdT(\nu, W)$$

Са ове тачке гледишта, скалар је тензор типа $(0, 0)$, вектор типа $(1, 0)$, а ковектор, то јест диференцијална форма је тензор типа $(0, 1)$.
Сви тензори фиксног типа (k_0, l_0) формирају реални векторски простор. Дакле, могу се сабирати и множити реалним бројем. Да би конструисали базу овог векторског простора, потребна нам је операција која се назива тензорски производ, која се означава са $\otimes$. Ако је (k, l), а S (m, n) тензор, онда се $T \otimes S$ $(k + m, l + n)$ дефинише на следећи начин:

$$T\otimes S(w^1, ..., w^{k+m}, V^1, ..., V^{l+n}) = T(w^1, ..., w^k, V^1, ...V^l)S(w^1, ..., w^m, V^1, ..., V^n)$$

Приметимо да не важи $T \otimes S = S \otimes T$. Сада је праволиниска ствар конструисати базу за простор тензора типа (k_0, l_0) узимајући тензорске производе базних вектора и базних дуалних вектора. Елементи базе ће бити:

$$\hat{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}$$

У 4-димензионом простору ће стога бити 4^{k+l} тензора базе. У базној нотацији за било који тензор пишемо:

$$T = T^{\mu_1,...,\mu_k}{}_{\nu_1,...,\mu_l}\hat{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}$$

Када имамо поновљене горње и доње индексе као у претходном случају то означава сумирање. Лако се показује да су компоненте $T^{\mu_1,...,\mu_k}{}_{\nu_1,...,\mu_l}$ дате са:

$$T^{\mu_1,...,\mu_k}{}_{\nu_1,...,\mu_l} = T(\hat{e}_{\mu_1} \otimes ... \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes ... \otimes \hat{\theta}^{\nu_l})$$

Дефинишемо још дејство тензора $\hat{e}_\mu$ и $\hat{\theta}_\nu$.

$$\hat{e}_\mu(w) = w_\mu \qquad \hat{\theta}^\nu(V) = V^\nu$$

Добијамо да је:

$$T(w^{(1)}, ..., w^{(k)}, V^{(1)}, ..., V^{(l)}) = T^{\mu_1,...,\mu_k}{}_{\nu_1,...,\nu_l} w^{(1)}{}_{\mu_1} ... w^{(k)}{}_{\mu_k} V^{(1)\nu_1} ... V^{(l)\nu_l}$$

При Лоренцовим трансформацијама коефицијенти тензора се трансформишу на следећи начин:

$$T^{\mu'_1,...,\mu'_k}{}_{\nu'_1,...,\nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} ... \Lambda^{\mu'_k}{}_{\mu_k} \Lambda_{\nu'_1}{}^{\nu_1} ... \Lambda_{\nu'_l}{}^{\nu_l} T^{\mu_1,...,\mu_k}{}_{\nu_1,...,\nu_l}$$

Наведимо још неке тензорске трансформације. Прва од њих се назива контракција тензора.
Дефиниција 7: Контракцијом тензора називамо трансформацију тензора (k, l) тензор у $(k-1, l-1)$ задану на следећи начин: сумирамо тензор по једном горњем и једном доњем индексу. Уколико је дат на пример тензор $T^{\rho\sigma}{}_{\rho\beta\gamma}$ онда је једна његова контракција $S^\rho{}_{\beta\gamma} = T^{\rho\sigma}{}_{\sigma\beta\gamma}$.Напоменимо да је редослед индекаса битан и да у општем случају важи:

$$T^{\mu\rho}{}_{\alpha\beta\rho} \neq T^{\rho\mu}{}_{\alpha\beta\rho}$$

Метрика простор-времена се може употребити са подизање и спуштање индекаса тензора. Односно важи:

$$T^{\alpha\beta\mu}{}_\delta = \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$$

Дакле и ово је једна тензорска операција(односно трансформација). Слично за све остале овакве трансформације.

1.3 Електромагнетни 4-потенцијал. Тензор електромагнетног поља. Максвелове једначине.

Дефиницја 7: Магнетни векторски потенцијал, у ознаци A је векторско поље дефинисано упоредо са електричним потенцијалом ϕ на следиђим једначинама:

$$B = \nabla \times A \tag{11}$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \tag{12}$$

, где је B магнетно поље, а E је елктрично поље.
Дефиниција 8: Електромагнетни 4-потенцијал, у ознаци $\mathbb{A}$, дефинише се на следећи начин:

$$\mathbb{A}^{\mu} = (\frac{\phi}{c}, A) \tag{13}$$

Јединица мере електромагнетног 4-потенцијала је $\frac{Vs}{m}$, где је V Волт, s секунда, а m метар.
У специјалној теорији релативности, електрично и магнетно поље морају бити написани у форми тензора да би се правилно трансформисали при Лоренцовим трансформацијама. Тако се добија електромагнетни тензор

$$F^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathbb{A}^{\nu} - \partial_{\nu}\mathbb{A}^{\mu} \tag{14}$$

Овај тензор је изоморфан електричном и магнетном пољу, али важна ствар је да се електрично и магнетно поље мењају реизбором координатног система, док се електромагнетни тензор не мења. Одговарајуће везе са електричним и магнетним пољем су следеће:

$$E_i = cF_{0i}$$

$$B_i = -\frac{1}{2}e_{ijk}F^{jk}$$

gde је e_{ijk} Леви-Чивита тензор.

У матричниј форми овај тензор је дат са

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Спуштањем индекаса добијамо

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Мешовита верзија овог тензора је

$$F^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Својства електромагнетног тензора :

1. Антисиметричност

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

2. Шест независних компоненти: то је последица да у Декартовим координатама те независне компоненте су координате E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z.

3. Рачуном се добија да је скаларни производ:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - \frac{E^2}{c^2})$$

4. Рачуном се добија детерминанта:

$$det(F) = \frac{1}{c^2}(B \cdot E)^2$$

Максвелове једначине у СТР гласе:

$$\nabla \times B - \partial_t E = 4\pi J$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times E + \partial_t B = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

где је ρ наелектрисање, а J густина електричне струје. Ако запишемо да је $J^\mu = (,\rho, J)$ Одатле се рачуном добијају Максвелове једначине у тензорском облику :

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$$

2 Време-простор као диференцијална многострукост са не-нула кривином. Општа теорија Релативности.

2.1 Коваријантни извод као тензорско уопштење партијалног извода на многострукостима.

Дефиниција 1:Парцијални извод у простору Минковског је трансформација која (k, l) тензор претвара у $(k, l+1)$ тензор на следећи начин:
На скаларима парцијални извод дејствује по следећем принципу

$$\partial : \phi \to \nabla\phi$$

На векторима парцијални извод дејствује на следећи начин:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}V^{\nu})$$

Слично и за диференцијалне форме. Индуктивно добијамо парцијалне изводе и за све остале тензоре.
Међутим, ово је специфична диференцијална многострукост. Уколико парцијални извод дејствује на неком (0,1) тензору W_ν на некој многострукости при координатној трансформацији важи:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}W_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}W_{\nu}) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}W_{\nu}) + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}})W_{\nu}$$

Као што видимо када други израз није нула (а нула је у Простору Минковског и Еуклидском простору) онда партијални извод (0,1) тензора није (0,2) тензор. Закључујемо да на парцијални извод није тензорска трансформација на свим многострукостима. Такав проблем уопштавања парцијалног извода на свим многострукостима решавамо увођењем коваријантног извода.

Захтеваћемо да коваријантни извод, који ћемо означавати са ∇ као уопштење парцијалног, буде пресликавање које на многострукостима пресликава (k, l) у $(k, l+1)$ и мора да за почетак задовољава:

1. Својство линеарности:

$$\nabla(T+S) = \nabla(T) + \nabla(S)$$

2.Лајбницово правило

$$\nabla(TS) = \nabla(T)S + T\nabla(S)$$

Пошто захтевамо да ∇ задовољава Лајбницово правило може се показати да се тај оператор може приказати као збир парцијалног извода и неке линеарне трансформације. Односно ако је дат $(1, 0)$ тензор V^ν његов коваријантни извод би био:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \qquad (1)$$

Пошто желимо да израз буде тензорска трансформација односно да $\nabla_\mu V^\nu$ буде $(1, 1)$ тензор мора да важи:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu$$

Пошто важи да је:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}{}_{\mu'\lambda'} V^{\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda$$

Са друге стране је:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Због тога имамо да важи следећа једнакости:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Најпре се последња једнакост може скратити са V^{λ} јер важи за сваки такав вектор. Још када помножимо са $\frac{\partial x^{\Lambda}}{\partial x^{\lambda'}}$ добијамо да је:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}} \qquad (2)$$

Коефицијенте $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ називамо коефицијентима линеарне конексије и они су нам познати са курса диференцијалне геометрије. Могу се увести и на друге начине, док је овде дат један од тих начина који има захтев да уопшимо парцијалне изводе на многостуркостима тако да то уопштење буде тензорска трансформација. Као што видимо из (2) линеарна конексија није тензор. Али нисмо то ни тражили од ње, већ да нам поправи парцијални извод.
Следеће две особине које ћемо захтевати од коваријантног извода да поседује су:

3. Комутативност са контракцијом

$$\nabla_{\mu}(T^{\lambda}{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\lambda\rho}$$

4. На скаларима се понаша као парцијални извод

$$\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi$$

Ова два новоуведена својства нам служе да бисмо уз претпоставку да она важе могли да изведемо да је:

$$\nabla_{\mu}w_{\nu} = \partial_{\mu}w_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}w_{\lambda}$$

Из ова два се изводи да за тензор $T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu l}$ важи:

$$\nabla_{\sigma}T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu l} = \partial_{\sigma}T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu l} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda}T^{\lambda\mu_2 \ldots \mu_k}{}_{\nu_1 \ldots \nu l} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda}T^{\mu_1\lambda \ldots \mu k}{}_{\nu_1 \ldots \nu l} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1}T^{\mu_1 \ldots \mu_k}{}_{\lambda \ldots \nu_l} - \ldots$$

Нека је дата разлика две конексије $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda}$. Можемо се запитати да ли је ова разлика тензор.Имамо да је

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} - \hat{\Gamma}^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}} =$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}(\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \hat{\Gamma}^{\nu}_{\mu\lambda})$$

Као што видимо овај израз је тензор. Стога ћемо дефинисати следећи тензор:

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = 2\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} \qquad (3)$$

Дефиниција 2: Тензор из израза (3) називамо тензор торзије на многострукости. Претпоставимо да нам је на многострукости дата метрика $g_{\mu\nu}$. Уколико сада захтевамо следећа два својства:

5. Конексија је симетрична, односно немамо торзију

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$

6. Коваријантни извод је компатибилан са метриком

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0$$

може се показати да постоји тачно једна конексија, односно само један коваријантан извод на многострукости који задовољава свих 6 својстава. Коефицијенти те конексије могу се израчунати, што ћемо прескочити, али ћемо навести како они гласе:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \qquad (4)$$

Јединствена конексија која задовољава свих 6 захтева назива се Леви-Чивитина конексија(негде се користи и назив Кристофелова конексија). У ОТР се користи искључиво ова конексија и њен одговарајући коваријантни извод.

2.2 Риманов тензор кривине.

Дефинишимо затворену петљу у тачки P на многострукости уз помоћ два једнична вектора A^{ν} и B^{μ}(односно, дефинишемо класе петљи). Замислимо сада да померамо вектор V^{ρ} који је дефинисан у тачки P паралелно по тој петљи. Желимо да израчунамо колика нам је разлика δV^{ρ} у односу на почетни вектор V^{ρ} када га паралелно померимо по малопре дефинисаној петљи враћајући се у почетну тачку P. Пошто је паралелно померање независно од промене координата можемо наслутити да постоји тензор које добро описује промену вектора

V^ρ током паралелног померања. Међутим, паралелно померање зависи од нашег одабира вектора тако да би то требало укључити у крајње решење за δV^ρ које је дато са

$$\delta V^\rho = A^\nu B^\mu R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \qquad (5)$$

Израз $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ се назива Риманов тензор кривине. Када је овај тензор нула у свакој тачки на многострукости кажемо да је та многострукост равна. Такве је био Простор Минковског, а такође то исто важи и за Еуклидски простор што се лако може проверити. Када је овај тензор не-нула функција онда кажемо да је простор крив, или другачије да многострукост има кривину.
Ово је један неформални начин да се уведе Риманов тензор кривине. Сада ћемо дати и формалну методу увођења са тиме што нећемо доказивати да се добија исти тензор. Рачунамо разлику:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho =$$

$$= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \to \nu) =$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma$$

$$+ \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda - (\mu \to \nu) =$$

$$= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) V^\sigma - 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda V^\rho$$

Из претходног израза дефинишемо Риманов тензор кривине тако да важи:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T_{\mu\nu}{}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho$$

односно

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

И као што смо рекли овако дефинисан Риманов тензор кривине се испоставља да је иста ствар као првобитна геометријска дефиниција. Наведимо и следећа два својства Риманове кривине:

1. Из формуле се види да је $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}$.

2. Као што видимо кривина је исконструисана у потпуности из конексије, односно не зависи нужно од метрике. Дакле, малопређашње извођење важи за све метрике.

2.3 Принцип еквиваленије.

Наведимо за почетак једно вазно својство метрике. За дату многострукост M и дату тачку P можемо метрику и Кристофелове симболе конексије компатибилне са метриком у тој тачки свести на следећи облик:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1) \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = 0 \qquad (7)$$

Заправо, можемо и мало боље од овога да извучемо: испоставља се да у свакој тачки P постоји координатни систем у којем $g_{\mu\nu}(P)$ узимају канонску форму и први изводи $\partial_\sigma g_{\mu\nu}(P)$ сви нестају (док други парцијални изводи $\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu}(P)$ не могу да се уклоне). Ове координате се зову Риманове нормалне координате, а придружени базни вектори (односно то су три локално дефинисана тангентна поља $\hat{e}_\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где је $U \subset M$, а $n = dimM$). Дакле, у Римановим нормалним координатама метрика $g_{\mu\nu}$ у тој околини $U \subset M, P \in U$ изгледа као да је метрика равног простора, односно простора са нула Римановим тензором кривине и то до првог реда.
Сада желимо да физички интерпретирамо то математичко извођење. Малопређашња дискусија нам говори да постоји локално референтни систем смештен у околини U тачке P тако да ствари које нас занимају у том референтном систему можемо технички изучавати као у Специјалној теорији релативности, односно као да имамо простор Минковског (тј. раван простор). Дакле локална геометрија око тачке P у датом тренутку је равна, али ово не важи за све тачке на многострукости простор-времена. У ОТР време-простор покушавамо да моделирамо као диференцијалну многострукост са Леви-Чивитином конексијом, а не као простор Минковског јер тај модел неће бити добар. Како се и уз помоћу чега моделира гравитација размотрићемо касније.
Изложимо сада један пример. Замислимо капсулу и физичара у њој на висини h од површине Земље. Капсула пада ка површини Земље са константним убрзањем и ако занемаримо разлике у отпору ваздуха за капсулу и човека и остале сметње, можемо да тврдимо да ће ка Земљи са истим убрзањем падати и физичар. Можемо закључити да ће физичар у тој ситуацији лебдети у капсули као да је у бестежинском стању.

Можемо се запитати да ли је оваква ситуација еквивалентна томе да је физичар у истој тој капсули, а она смештена негде дубоко у космосу где нема много материје која би проузроковала неки значајан гравитациони утицај, односно на неком месту без значајних гравитационих утицаја.
Тада физичар опет осећа да је у бестежниском стању. Делује као да физичаров референти систем неутрализује утицај гравитације, односно да је то онај у којем важе релације (6) и (7) када измоделирамо време-простор.
Знамо и да овакав ефекат гравитационе неутрализације не можемо применити на целокупно простор-време односно Риманов тензор кривине није тривијилан за време-простор.
Слаби принцип еквиваленције тврди да се ефекти гравитације могу неутралисати на малим временским размацима локално одабирем одговарајућег убрзаног референтног система. Могуће је, тврдити и много јачу ствар од тога: она се назива јаки принцип еквиваленције. Јаки принцип еквиваленције каже да се било која физичка интеракција па и гравитациона локално може описати као да имамо неутралисану гравитацију, односно локално нула Кристофелове симболе, па тиме и локално нула Риманову кривину.
Осврнимо се на тренутак на гравитацију на целом време-простору, односно глобално. Испоставља се да је потребна и довољна ствар да се гравитација моделира Риманов тензор кривине, што овде нећемо детаљно радити, већ смо само напоменули.
Применимо по први пут јаки принцип екввеленције. Имамо да ће Максвелове једначине локално имати исти облик као у Специјалној теорији релативности. Такође, физичар који изводи експеримент у капсули која слободно пада локално мери брзину светлости c. Било који закон Специјалне теорије релативности изражен тензорски можемо уопштити користећи Јаки принцип еквиваленције, што ћемо сада учинити са Максвеловим једначинама. Све што треба учинити је превести изразе Специјалне теорије релативности на одговарајуће из Опште.
Уопштимо као пример Максвелове једначине. Њих смо тензорски записали:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu \qquad (8)$$

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \qquad (9)$$

Знамо да је коваријантни извод тензорско уопштење парцијалних извода на многострукостима. Стога Максвелове једначине добијају следећи облик:

$$\nabla_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu \qquad (10)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \qquad (11)$$

Кристофелови симболи који фигуришу у (10) и (11) су гравитациони утицаји.
У истом маниру можемо описати инерцијално кретање у ОТР. У Њутновској механици слободно кретање је подразумевало праволинијско кретање константном брзином или мировање и то је кретање без гравитационог утицаја што је описано једначином

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0$$

Уопштење таквог кретања је паралелно померање. Стога се тело без икаквих утицаја осим гравитације креће трајекторијом одређеном једначином:

$$\frac{D}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0$$

односно

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

Овај одељак бисмо завршили још једним примером који би нам наговестио какву геометрију простор-времена ствара гравитација према ОТР и са каквим стварима тренутно баратамо. Треба бити пажљив што ћемо видети на следећем примеру. Нека је дат простор Минковског са стандардним линијским елементом:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Извршимо сада следећу координатну трансформацију константом g,

$$x = \frac{c^2}{g}(\cosh\frac{gt'}{c} - 1) + x'\cosh\frac{gt'}{c}$$

$$y = y' \qquad\qquad z = z'$$

$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{gt'}{c} + \frac{x'}{c}$$

Када изразимо линијски елемент ds^2 преко нових координата кратким рачуном добија се :

$$ds^2 = (1 + \frac{gx'}{c^2})^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \qquad (12)$$

Ако узмемо кретање око координатног почетка параметризовано геодезијом:

$$t' = t', \qquad x' = 0, \qquad y' = 0, \qquad z' = 0$$

та геодезија изражена у старим координатама је у следећем облику:

$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{gt'}{c} \qquad x = \frac{c^2}{g}(\cosh\frac{gt'}{c} - 1) \qquad y = 0 \qquad z = 0 \qquad (13)$$

Из кинематике СТР нам је познато да једначине (13) описују равномерно убрзање неке честице које износи g која је у почетном тренутку $t = 0$ у координатном почетку $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Даље, из новодобијеног линијског елемента очигледно је да нису сви Кристофелови симболи $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ конексије која је у складу са метриком једнаки нули у тачки $x' = 0, y' = 0, z' = 0$. Дакле, референтни систем $Ox'y'z'$ је неинерцијалан. За коефицијент метрике g_{00} имамо да је

$$g_{00} = 1 + \frac{gx'}{c^2} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

где је Φ Њутнов Гравитациони потенцијал који индукује убрзање $-g$. Појам Њутнов Потенцијал објаснићемо у следећој глави, засад нам није битан. Овде сада имамо обрнуту ситуацију од оне са физичаром у капсули: чини се да смо одговарајућим одабиром референтног система индуковали гравитационо поље. Међутим то није тачно, Риманов тензор кривине је нула у било ком координатном систему тако да је простор и даље раван.

2.4 Тензор импулс-енергије.

У овом каратком одељку ћемо дефинисати тензор импулс-енергије. Тензор импулс-енергије је тензорска величина у физици која описује густину и флукс енергије и импулса у време-простору и уопштава тензор

импулса у Њутновској физици. Овај тензор интерпретира материју, зрачење и негравитационе силе. Тензор импулс-енергије се означава са $T^{\alpha\beta}$ и описује флукс α компоненте вектора импулса кроз површину тако да је x^{β} координаата константна.
За кратко се осврнимо на следећу ствар. У ОТР вектор импулса је дефинисан као 4-импулс. 4-импулс се у ОТР дефинише на следећи начин:

$$p = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$$

Ово ћемо користити у даљем раду.
У ОТР тензор импулс-енергије је симетричан односно важи:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

У једном од наредних одељака видићемо да постоје разне врсте овог тензора.

3 Принцип најмање акције. Ајнштајнове једначине.

3.1 Њутнов Гравитациони потецијал.

За сваки једнодимензиони систем могуће је дефинисати потенцијалну енергију за било коју функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(x')dx'$$

где је x_0 позиција на којој дефинишемо да је $U = 0$. Мењање ове тачке нема значајан утицај на испитивање динамике система.
У вишедимензионом случају имамо да је

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(x')d^n x'$$

и ако криволинијски интеграл зависи од путање онда следи да се претходни израз, односно потенцијал не може дефиницати. Довољан услов да овај интеграл не зависи од путање је да важи да постоји нека функција $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = -\nabla U(x)$$

Такве функције се називају конзервативним.
У астрофизичким применама природније је радити са криволинијским интегралом пре него са силом: овај интеграл је потенцијал енергије за јединичну масу, такозвани гравитациони потенцијал, $\Phi(x)$, а потенцијална енергија тест честице m је $U = m\Phi(x)$. За густину $\rho(x)$, потенцијал је:

$$\Phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} d^3x'$$

где је G је гравитациона константа, а интеграл је узет преко целог $\mathbb{R}^3$ (димензија је 3 јер смо у реалном простору са Њутновом интерпретацијом).

3.2 Проблеми при уопштавању закона физике у равном простору на законе ОТР.

Посматрајмо следећу формулу за очување енергије у време-простору (објаснићемо касније откуд ова формула):

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

где је $T^{\mu\nu}$ тензор импулс-енергије. Уз помоћ јаког принципа еквиваленције уопштење ове формуле је:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \qquad (1)$$

Ова једначина објашњава очување енергије у присуству гравитационог поља.
Међутим, посматрајмо следећу ствар. Нека је дат тензорски израз у равном простору:

$$Y^\mu \partial_\mu \partial_\nu X^\nu = 0$$

Ако бисмо хтели да уопштимо ову тензорску једнакост примећујемо очигледан проблем. Парцијални изводи комутирају, а коваријантни не комутирају. Тако да је проблем у томе што је могућа да немамо јединствено проширење. Важи да је:

$$Y^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu X^\nu - Y^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu X^\nu = -R_{\mu\nu} Y^\mu X^\nu$$

Дакле, уопштавање закона није баш праволинијски задатак, већ се рашава многим методама и уопштени закон мора да буде у складу са целокупном ОТР.
Сличне тешкоће можемо уочити и при уопштавању Максвелових једначина. Малопре смо их уопштили, али ако посматрамо једну од једначина у алтернативном облику имамо да је:

$$\nabla_\mu [(1 + \alpha R) F^{\nu\mu}] = 4\pi J^\nu \qquad (2)$$

где је R контракција кривине која се назива Ричијев скалар. Ако ова једначина правилно описује електромагнетизам у закривљеном простору, онда је могуће мерити R у малим околинама, радећи експерименте са наелектрисаним честицама. Принцип еквиваленције захтева да је $\alpha = 0$. Свеједно, (2), може се показати задовољава све потребне услове да буде уопштење Максвелових једначина равног простора. Зашто је онда разумно ствити да је $\alpha = 0$? Довољно добар разлог би био следеће. Ричијев скалар садржи друге изводе метрике(као контракција Римановог тензора), стога R има мерну јединицу $()^{-2}$. Стога би константа α морала да има јединицу мере $()^2$. Али, пошто је константа α додата због гравитационих утицаја може се утврдити је да важи :

$$\alpha \approx l_p^2 = (\frac{G}{c^3})^{\frac{1}{2}} = 1.6 \times 10^{-33} cm$$

Дакле, α је превише мали број, тако да се израз αR може занемарити. Требало би ово имати у виду. Дакле, теорија којом се овде бавимо има мана, али можемо рећи да су те мане занемарљивог утицаја на резултате.

3.3 Принцип најмањег дејства. Ајнштајнове једначине.

Сада ћемо уопштити принцип најмањег дејства уз помоћ Јаког Принципа Еквиваленције. У простору Минковског је дејство дато следећом једначином

$$\mathbb{AC} = -\sum_a cm_a \int d\tau_a - \frac{1}{16\pi c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x - \sum_a \frac{e_a}{c}\int \mathbb{A}_\mu da^\mu \qquad (3)$$

, где су $\mathbb{A}_\mu$ компоненте 4-електромагнетног потенцијала, (тензор електромагнетног поља) које су подсетимо се у следећој релацији са електромагнетим пољем:

$$\partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu = F_{\mu\nu} \qquad (4)$$

, док су e_a, m_a редом наелектрисања и масе честица , а њихове координате су дате са a^i, а сопствено време τ_a са:

$$d\tau_a^2 = \eta_{\mu\nu} da^\mu da^\nu \qquad (5)$$

Први интеграл је једнодимензиони и може се узети да буде одређен на неком времнском интервалу сопственог времена, а у овом запису ће бити узет по целом времну, други је запремински по целом време-простору (исто се може узети одређени кавадар), а трећи интеграл је криволинијски и важи иста прича као за прва два. Како генерализујемо (3) у ОТР? Најпре, приметино да $\eta_{\mu\nu}$ морамо заменити са $g_{\mu\nu}$. Даље, мора да важи следећа релација:

$$\nabla_\mu \mathbb{A}_\nu - \nabla_\nu \mathbb{A}_\mu = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} \mathbb{A}_\lambda - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda} \mathbb{A}_\lambda = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu = F_{\mu\nu} \tag{6}$$

, јер су Кристофелови симболи конексије која је компатибилна са метриком симетрични по два доња индекса (торзија је нула). Даље интеграл $\int F_\mu F^\nu d^4x$ се мења у следећи израз:

$$\int (-g)^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

из разлога што важи следећа једнакост:

$$(-g)^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 dx^3 dx^0 = \frac{1}{24} e_{ijkl} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\rho$$

која се понаша као тензор. Дакле, акција је у ОТР дата са:

$$\mathbb{AC} = -\sum_a cm_a \int d\tau_a - \frac{1}{16\pi c} \int (-g)^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x - \sum_a \frac{e_a}{c} \int \mathbb{A}_\mu da^\mu \tag{7}$$

Из релације (5) и из извођења аналогне једнакости у ОТР можемо закључити да је сопствено време честице у ОТР дато са:

$$\tau_a = \int (g_{\mu\nu} \frac{da^\mu}{d\lambda} \frac{da^\nu}{d\lambda})^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

где је λ параметар кретања честица. Да бисмо истражили проблем кретања тако да тело пређе најкраћи пут, употребићемо методу варијационог рачуна(ово ће уствари бити криве максималног сопственог времена).

$$x^\mu \Rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$$

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} + \delta x^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

Друга трансформација је из Тејлоровог развоја у време-простору и нећемо залазити дубље у то на овом месту. Одатле је:

$$\tau+\delta\tau=\int\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda=$$

$$=\int\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\left(1+(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda})\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}d\lambda\Bigg)$$

С обзиром да знамо да је δx^σ мала вредност Употребом Телјоровог развоја добијамо:

$$\delta\tau=\int\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\lambda}\right)d\lambda$$

На овом месту ћемо променити параметризацију:

$$d\lambda=\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

Сада је :

$$\delta\tau=\int\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}+g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}\right)d\tau$$

$$\delta\tau=\int\left(\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}-\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau})\right)\delta x^\sigma d\tau$$

У последњем реду је искоришћено да δx^σ нестаје на крајњим тачкама пута што је тачно јер крајње тачке не покушавамо да изварирамо. Пошто тражимо стационарна решења, желимо да $\delta\tau$ за било коју варијацију буде 0. Стога је:

$$\frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}-\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu g_{\mu\sigma}-g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=0$$

Када променимо индексе сумирања имамо:

$$-g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}-\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu})=0$$

Множењем најпре са -1 и инверзом метрике добијамо коначно:

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}+\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu})=0$$

Као што видимо добили смо једначину геодезије парамтеризоване сопственим временом, а Кристофелови симболи су симболи Кристофелове конксије, односно оне која је компатибилна са метриком. Као што смо напоменули геодезије су једначине кретања честица на које не делује ниједна сила (осим наравно гравитације, а већ смо рекли да је не сматрамо спољном силом већ кривином у ОТР). Знамо да је Други Њутнов закон у Њутновској механици изражен са $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$. Он се у ОТР модификује на следећи начин:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} = \frac{q}{m}F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Ово нећемо доказивати, али можемо макар наслутити да је то тачно. Објаснимо још како је кретање по геодезији кретање такве врсте да нам тада пролази највише времена. Разлог је следећи: уколико је дата нека временска крива можемо је апроксимирати произвољно добро нула кривама. То чинимо на следећи начин: приближавамо се цик-цак кривом тако да су њени непрекидно-диференцијабилни делови или под углом од $45°$ или под углом од $135°$. Као што знамо то је нула крива. Геодезија стога не може бити крива минималног сопственог времена, јер не можемо достићи тај минимум. Стога је она као екстремално решење, крива максималног сопственог времена. Треба бити опрезан и рећи да је све ово локалног карактера. На тај начин решавамо проблеме различитог проласка времена (макар локално, глобализација овог проблема је комплекснија ствар): Тело које се креће по геодезији искушава бржи пролазак времена.

Да видимо шта ће се десити када варирамо коефицијенте метрике $g_{\mu\nu}$ за мале варијације следећег облика:

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

Приметимо најпре да нам је за $d\tau_a{}^2$ варијацијом метрике:

$$\delta(d\tau_a{}^2) = \delta(g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu$$

Односно

$$\delta(d\tau_a) = \frac{1}{2}\delta(g_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{d\tau_a}\frac{dx^\nu}{d\tau_a}d\tau_a$$

Стога ако варирамо први израз у $\mathbb{AC}$ имамо

$$\delta\sum_a cm_a\int d\tau_a = \frac{1}{2}\sum_a c\int m_a\frac{dx^\mu}{d\tau_a}\frac{dx^\nu}{d\tau_a}d\tau_a\delta g_{\mu\nu} \qquad (8)$$

Разматрајмо претходну варијацију у 4-димензионој околини V тачке P. Ако узмемо локални инерцијални систем у околини тачке P можемо претходни израз написати у компактнијој форми. Најпре је

$$p^{\mu}{}_{(a)} = cm_a \frac{dx^{\mu}}{ds_a}$$

4-моменат честице x. Затим је

$$cp^{\mu}{}_{(a)} = E_a$$

енергија честице, па имамо:

$$\frac{1}{2} cm_a \frac{dx^{\mu}}{ds_a} \frac{dx^{\nu}}{ds_a} ds_a =$$

$$= \frac{c^2}{2c^2 m_a c \frac{dt}{ds_a}} c^2 {m_a}^2 \frac{dx^{\mu}}{ds_a} \frac{dx^{\nu}}{ds_a} dt =$$

$$= \frac{c^2}{2E_a} p^{\mu}{}_{(a)} p^{\nu}{}_{(a)} dt_a = \frac{c}{2E_a} p^{\mu}{}_{(a)} p^{\nu}{}_{(a)} dx^0{}_a$$

Дакле, израз (10) се може написати на следећи мерем вишеструким интегралом преко запремине V:

$$\delta \sum_a cm_a \int ds_a = \int_V \delta g_{\mu\nu} \frac{1}{2c} T_{(m)}{}^{\mu\nu} d^4x \qquad (11)$$

где је

$$T_{(m)}{}^{\mu\nu} = \sum_a \frac{c^2}{E_a} p^{\mu}{}_a p^{\nu}{}_a$$

и ово је сума по свим честицама које пролазе кроз околину V.
Новоуведени израз $T_{(m)}{}^{\mu\nu}$ је израз за тензор енергије за материју. То је $(2,0)$ тензор док нам доњи коефицијент не означава тензорски коефицијент већ...
Размотрићемо три случаја овог тензора за три различите врсте материје:
1.Прашина: Ово је најједноставнија ситуација у којој су геодезије око тачке P приближно паралелне линије (слика 1.) . Ако означимо 4-брзину са u^{μ}, можемо га свести на канонски облик који је исти за сваку честицу $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Ово је урађено Лоренцовом трансформацијом у

којој је референтни систем мирујући у односу на прашину добијамо да је једини ненула елемент тензора енергије

$$T^{00} = \sum_a m_a c^2 = \rho_0 c^2$$

где је ρ_0 густина масе прашине у стању мировања. Приликом Лоренцових трансформација добија се:

$$T_{(m)}{}^{ik} = \rho_0 c^2 u^\mu u^\nu$$

2.Релативистичке честице: Ово је потпуна супротност од прашине. У овој ситуацији се релативистиче честице крећу крот V запремину. 4-моменат овакве типичне честица је задан апроксимативно са:

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, P), \quad E^2 = c^2 P^2 + m^2 c^4 \approx c^2 P^2, \quad P = |P|$$

Налазимо да је:

$$T^{00} = \sum_a \frac{c^2}{E_a} (\frac{E_a}{c})^2 = \sum_a E_a = \varepsilon$$

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = \sum_a \frac{P_a^2 c^2}{3E_a} = \frac{\varepsilon}{3}$$

где ова тројка долази јер смо скалирали подједнако у сва три правца. Стога је

$$T^{\mu\nu}_{(m)} = diag(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3})$$

3.Флуиди: Ово је ситуација када се честице не крећу релативистички. Ипак крећу се случајно и прелазе мале раздаљине. Ако одаберемо референтни систем у којем је флуид у целини у стању мировања можемо добити компоненте тензора $T^{\mu\nu}_{(m)}$ на следећи начин. Нека типична честица има вектор момента у следећем облику:

$$p^0 = \frac{mc^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}, \quad p^i = \frac{mv}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$$

Тада је:

$$T^{00} = \sum mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sum mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = \rho c^2$$

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = \frac{1}{3}\sum mv^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \approx p$$

Овде p и ρ су притисак и густина флуида. У референтном систему у којем је флуид цео у стању мировања имамо да је:

$$T_{(m)}{}^{\mu\nu} = (p + \rho c^2)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \qquad 12$$

јер је $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$.
Уколико ову формулу запишемо у форми ОТР имамо:

$$T_{(m)}{}^{\mu\nu} = (p + \rho c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}(15)$$

Значајно је генералисати формулу (11). Важи да је:

$$\delta \sum_a cm_a \int ds_a = \int (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g_{\mu\nu} \frac{1}{2c} T_{(m)}{}^{\mu\nu} d^4x \qquad (16)$$

где су $T_{(m)}{}^{\mu\nu}$ из једначине (15).
Тензор енергије електромагнетног поља
Сада разматрамо други израз у једначини за *Action*. Ако фиксирамо A_μ, одмах следи да се не мењају ни $A_{\mu\nu}$ при варијацији $g_{\mu\nu}$, па стога важи следеће:

$$\delta g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda}$$

односно множењем са инверзним тензором од $g_{\nu\lambda}$ имамо :

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}$$

Такође имамо да је:

$$\delta(-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\delta g_{\mu\nu} \qquad (24)$$

Враћањем у варијацију другог израза имамо:

$$\delta \frac{1}{16\pi c}\int_V F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}} d^4x = \frac{1}{2c}\int_V T_{((em)}{}^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\delta g_{\mu\nu} d^4x$$

где имамо да је тензор енергије електромагнетног поља дат са :

$$T^{\mu\nu}_{(em)} = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{4}F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}g^{\mu\nu} - F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu})$$

Као што видимо у закривљеном време-простору $T^{\mu\nu}$ тензори разних енергија су повезани са варијацијом метрике $g_{\mu\nu}$. Оваквим варијацијама је Хилберт дошао до једначина гравитационог поља, недуго после Ајнштајновог тврђења да оне важе. Сада ћемо се позабавити њима.
Наш задатак у овом одељку је да уопштимо чувене Пуасонове једначине:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

На левој страни имамо диференцијални оператор другог реда који дејствује на потенцијал, адесна страна је мера густине. Знамо да је уопштење густине тензор импулс-енергије $T_{\mu\nu}$. За сада без објашњења запишима да је $h_{00} = -2\Phi$, а касније ћемо размотири зашто ово важи. Сада имамо да је

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00}$$

Лева страна није тензор. Претпоставимо да лева страна зависи од $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$(касније ћемо видети зашто то важи, мада нећемо изводити!). Сада нам се индекси не слажу. Стога контакујемо тензор кривине на $R_{\mu\nu}$. Добијамо да је:

$$R_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$$

Међутим, сада имамо проблем са тиме да се то не слаже са законом одржања енергије. Као што знамо важи да је:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

одакле следи да је

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0$$

Ово за произвољну геометрију очигледно није увек тачно. Из Бјанкијевог идентитета имамо да је:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$$

Стога се дефинише следећи тензор:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

Важи да је

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^\mu R g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R$$

јер важи компатибилност метрике са коватријантним изводом. Дакле, Ајнштајнов тензор задоваљава закон одржања енергије. Што значи да је

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \qquad (18)$$

Сада нам се све слаже осим што морамо да одередимо константу k у претходном изразу.
Иако имамо 10 једначина са 10 непознатих коефицијената $g_{\mu\nu}$, али нам услов (19) омогућава да број непознатих $g_{\mu\nu}$ сведемо на 6. Ова недређеност је због тога што уколико имамо једно решење $g_{\mu\nu}$ онда су и све његове тензорске трансформације добијене променом координата такође решења за метрику.
Једначина (19) важи за све $T^{\mu\nu}$ добијене из принципа акције варијацијом $g_{\mu\nu}$. Можемо се онда запитати да ли се Ајнштајнов тензор може извести из принципа Акције. Тај проблем је решио Хилберт. Посматрајмо варијацију следећег израза:

$$S = \frac{1}{2k}\int R(-g)^{\frac{1}{2}}d^4x$$

где је интеграл узет по целом простор-времену ако конвергира. Претпоставимо да је целокупна акција дата терминима: $\frac{1}{2k}R(-g)^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{1}{2k}L_m$ који описује материјална поља. Дакле:

$$S' = \frac{1}{2k}\int (R + L_m)(-g)^{\frac{1}{2}}d^4x$$

Стога је:

$$\delta S' = \int \left(\frac{1}{2k}\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}d^4x =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2k}(\frac{\delta(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}})R}{\delta g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}}) + \frac{1}{(-g)^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}d^4x$$

Пошто тражимо стационарна решења желимо да за $\delta g^{\mu\nu}$ добијамо :

$$\frac{1}{2k}(\frac{\delta(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}})R}{\delta g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}}) + \frac{1}{(-g)^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

односно

$$\frac{\delta(R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}})R}{\delta g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}} = -2k(\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}) \qquad (27)$$

Десна страна је такозвани Стрес-Енергија тензор(заправо, овде му је промењен знак, али битно је да је тензор) и он се може написати на следећи начин:

$$T_{\mu\nu} = 2(\frac{1}{g^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}) = 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}L_m$$

Сада ћемо потражити и варијације Римановог тензора, Ричијевог тензора и Ричијевог скалара. Пошто Риманова кривина зависи само од Леви-Чивитине конексије варијација Римановог тензора се рачуна на следећи начин:

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$$

Приметимо да је:

$$\delta R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma})$$

Ово може јер је $\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}$ и сви истог облика само са другачијим индексима, разлика две конексије, а самим тим и тензор па се може узети њихов коваријантни извод.
Сада ћемо извести и варијацију за Ричијев тензор и Ричијев скалар.

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu})$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta d^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\delta d^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu})$$

У последњем реду смо користили формулу за варијацију Ричијевог тензора и компатибилност метрике у односу на коваријантни извод $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$.
Знамо да је :

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu((-g)^{\frac{1}{2}}A^\mu)$$

Стога на основу Стоксове теореме израз $\nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\rho\mu})$ нестаје јер варијација метрике $\delta g^{\mu\nu}$ нестаје у бесконачности. Добијамо:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$$

Из (24) се одмах види да је:

$$\frac{\delta((-g)^{\frac{1}{2}})R}{\delta g^{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

Враћањем у (27) добијамо оно што смо и тражили:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$$

3.4 Њутновска апроксимација гравитационих једначина.

Дошли смо до важног питања одређивања константе k чије одређивање треба да буде тако да се Њутноска гравитација повеже са гравитацијом у Општој теорији релативности. Прва ствар која нас води до ове везе је једначина у којој видимо да је $g_{00}-1$ пропрционално Њутновом гравитационом потенцијалу. Сада желимо да боље формализујемо ту везу и да одатле одредимо k. Показаћемо да такозвано споро кретење и апроксимација слабим пољем гравитрацију из ОТР своде на Њутнову теорију о гравицији. Ова апроксимација се врши под следећим претпоставкама:
1. Кретања честица су нерелативистичка : $v \ll c$. У овом случају радимо са Њутновском механиком.
2. Гравитационо поље је слабо у следећем смислу:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1(30)$$

Неједнакост сугерише да игноришемо степене $h_{\mu\nu}$ веће од 2 у принципу најмање акције и веће од 1 у једначинама гравитације .
3. Поље се мења споро у времену. То значи да треба игнорисати временске изводе у поређењу са просторним изводима.
Тада је:

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu \approx$$

$$\approx (1+h_{00})d{x_0}^2 - (1+h_{ii})d{x_i}^2 \approx (1+h_{00})c^2dt^2 - v^2dt^2$$

односно:

$$ds \approx (1+h_{00}-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}cdt \approx (1+\frac{1}{2}h_{00}-\frac{v^2}{2c^2})cdt \qquad 30$$

Како важи (30) из $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$ добијамо да је:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Кристофелови симболи су:

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\mu h^\sigma_\nu - \eta^{\sigma\rho}\partial_\rho h_{\mu\nu})$$

па је одатле Риманов тензор:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = 2(\partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}) =$$

$$= \eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\lambda\sigma} - \partial_\lambda\partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\partial_\nu h_{\sigma\mu}) =$$

$$\eta^{\rho\lambda}(\partial_\sigma\partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\partial_\nu h_{\sigma\mu}) =$$

$$h_\nu{}^\rho{}_{,\mu\sigma} - h_{\sigma\nu,}{}^\rho{}_\mu - h^\rho{}_{\mu,\sigma\nu} + h_{\sigma\mu,}{}^\rho{}_\nu$$

Како је $R_{\sigma\nu} = \delta^\mu{}_\rho R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$:

$$2R_{\sigma\nu} = h_\nu{}^\rho{}_{,\rho\sigma} - h_{\sigma\nu,}{}^\rho{}_\rho - h^\rho{}_{\rho,\sigma\nu} + h_{\sigma\rho,}{}^\rho{}_\nu =$$

Краћим рачуном добијамо и Ричијев тензор:

$$R = R_{\sigma\nu}\eta^{\sigma\nu} = h^{\rho\sigma}{}_{,\rho\sigma} - \Box h$$

Ако бисмо желели да упоредимо просторне и временске промене положаја имамо $\frac{\delta x^s}{\delta x^0} = \frac{v}{c}$ што је у Њутновској механици веома мали број. Можемо закључити да онда су сви $h_{\mu\nu}$ занемарљиво мали у односу на h_{00} и само нам је тај коефицијент битан. Стога је у Њутновском случају, занемарујући изводе по времену и све $h_{\mu\nu}$ у односу на h_{00} Ричијев тензор: $R \approx \nabla^2 h_{00}$ Како је :

$$(-g)^{\frac{1}{2}} \approx (1 + h_{00})^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}h_{00}$$

Дакле:

$$R(-g)^{\frac{1}{2}} \approx (1 + \frac{1}{2}h_{00})\nabla^2 h_{00}$$

Вратимо се сада на принцип најмање акције. Ако њему додамо и $\frac{1}{2kc}\int_V R(-g)d^4x$ и када убацимо све што смо досад одрадили: Најпре оно што смо раније закључили

$$\sum_a cm_a \int ds_a \approx \sum_a cm_a \int ((dx^0)^2 g_{00})^{\frac{1}{2}} \approx \sum_a c^2 m_a \int (1 + \frac{1}{2}h_{00} - \frac{v^2}{2c^2})dt$$

Стога је

$$Action = -\sum_a c^2 m_a \int (\frac{1}{2}h_{00} - \frac{{v_a}^2}{2c^2})dt + \frac{1}{2k}\int (1 + \frac{1}{2}h_{00})\nabla^2 h_{00} d^3x dt + constant$$

Овде константа представља термине који су независни од пута тако да могу бити игнорисани у варијационим проблемима. Користећи први Гринов идентитет имамо:

$$\int_{3-Volume} (1 + \frac{1}{2}h_{00})\nabla^2 h_{00} d^3x = \int_{2-Surface} (1 + \frac{1}{2}h_{00})\nabla h_{00} dS - \frac{1}{2}\int_{3-Volume} (\nabla h_{00})^2 d^3x$$

Површински интеграл у прошлом изразу можемо занемарити. Дакле,

$$Action \approx -\sum_a c^2 m_a \int (\frac{1}{2}h_{00} - \frac{{v_a}^2}{2c^2})dt - \frac{1}{4k}\int \nabla^2 h_{00} d^3x dt$$

Када упоредимо ово последње са Њутновским изразом за принцип најмање Акције:

$$Action_N \approx -\frac{1}{8\pi G}\int\int (\nabla\phi)^2 d^3x dt - \sum_a m_a \int \phi dt + \sum_a \frac{1}{2}m_a \int {v_a}^2 dt$$

Дакле стављањем да је

$$\phi = \frac{1}{2}c^2 h_{00} \qquad\qquad k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Дакле, сводећи Општи принцип најмање акције на Њутновски добили смо k.
Фусноте:
1. https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz$_{g}roup$