$$\boxed{a_n} + b_n + c_n + d_n = 1$$
$$\boxed{b_n} + 3c_n + 7d_n = 2^n - 1$$
$$30\boxed{c_n} + 300d_n = 7^n - 6\cdot 2^n + 5 \quad \big]\,(-1)$$
$$30c_n - 30d_n = (-4)^n + 5\cdot 2^n - 6$$

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$
$$\boxed{b_n} + 3c_n + 7d_n = 2^n - 1$$
$$30\boxed{c_n} + 300d_n = 7^n - 6\cdot 2^n + 5$$
$$-330\boxed{d_n} = (-4)^n + 11\cdot 2^n - 7^n - 11$$

$$\cancel{d_n = \frac{1}{330}(7^n}\qquad \boxed{d_n = \frac{1}{330}\left(7^n - (-4)^n - 11\cdot 2^n + 11\right)}\qquad \boxed{c_n = \frac{1}{30}\left(7^n - 6\cdot 2^n + 5 - 300d_n\right)}$$

$$\boxed{b_n = 2^n - 1 - 3c_n - 7d_n}\qquad \boxed{a_n = 1 - b_n - c_n - d_n}$$

$$L^n = p_n(L)\cdot \underbrace{m_L(L)}_{=0} + q_n(L) = a_n I + b_n L + c_n L^2 + d_n L^3$$

---

6. $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y,z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 8xz$.

У канонској бази, Φ има матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Нађимо ~~сопств~~ сопствене вредности за A:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 4 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 4 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(-1-x) + 16 + 16 + 16(1+x) - 8\cdot(2-x) =$$
$$= (x^2 - 4x + 4)(-1-x) + 32 + \cancel{16} + 16x - \cancel{16} + 8x =$$
$$= -x^3 + 3x^2 + 16x + 8x - 4 + 32 = -x^3 + 3x^2 + 24x + 28 = -(x+2)^2(x-7)$$

Нађимо сопствене векторе:

$\lambda = 7$: $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$$-5x + 2\boxed{y} + 4z = 0 \quad :4 \quad (-1)$$
$$2x - 8y + 2z = 0$$
$$4x + 2y - 5z = 0$$
$$-5x + 2\boxed{y} + 4z = 0$$
$$-18x + 18z = 0$$
$$9\boxed{x} - 9z = 0 \quad \big]\cdot 2$$
$$\vdots = 0$$
$$0 = 0$$

$$\boxed{z \in \mathbb{R},\ x = z,\ y = (5x - 4z)\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}z}$$

Сопствени вектор за $\lambda = 7$: $\underset{u_1}{z\cdot(2,1,2)}$

$\lambda = -2$: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$$2x + y + 2z = 0$$

~~(x,z)~~ ~~(x,y)~~ $x, z \in \mathbb{R}$, $y = -2x - 2z$

Сопствени вектори: $x\cdot\overset{u_2}{(1,-2,0)} + z\cdot\underset{u_3}{(0,-2,1)}$

4)

$\cancel{\left(P = \left[\ \right)\right.}$ $\|U_1'\| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $U_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)$

$\|U_2'\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$

$\tilde{U}_3 = \alpha \cdot U_2 + U_3' \ / \langle \cdot, U_2 \rangle$

$0 = \alpha + \langle (0,-2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0) \rangle = \alpha + (+\frac{4}{\sqrt{5}}) \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\tilde{U}_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0) + (0,-2,1) = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$

$\|\tilde{U}_3\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} \Rightarrow U_3 = \frac{5}{3\sqrt{5}}(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,-2,5)$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \qquad P^T A P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D$$

$\operatorname{sgn}(\Phi) = (1,2)$
$\operatorname{rang} \Phi = 3$

$$\Phi(x,y,z) = X \cdot A \cdot X^T = X \cdot P \cdot D \cdot P^T \cdot X^T$$

7.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-X & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-X & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-X & 2-X \\ 1 & 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} =$$

$$= (2-X) \begin{vmatrix} 5-X & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 5-X & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1-X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X) \cdot \begin{vmatrix} 5-X & 4 & \cdots \\ 0 & 1-X & \cdots \\ 1 & 1 & 3-\cdots \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 5-X & -1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X) \cdot (X^2 - 8X + 16) = (X-1)(X-2)(X-4)^2$$

Постоје две могућности: $m_A(X) = (X-1)(X-2)(X-4)$ или

$m_A(X) = (X-1)(X-2)(X-4)^2$.

$(A-E)\cdot(A-2E)\cdot(A-4E)=\ldots\neq 0 \Rightarrow m_A(X)=\chi_A(X)$

Дакле, пошто су 1 и 2 корени χ_A вишеструкости 1, а 4 вишеструкости 2, то је $J_A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$

(8.) A је ортогонална матрица са $\det A=1$, па се може записати у блок-дијагоналном облику

$A=\begin{bmatrix}D_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & D_m\end{bmatrix}$, где су могући блокови $[1]$, $[-1]$, $\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix}$,

Блокова $[-1]$ има парно много, јер је $\det A=1$. Дакле, $[-1]$ блокове можемо посматрати као блокове $\begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix}$. Сада B налазимо из потопних, где код A стоји $[1]$, код B стоји $[1]$

$\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\cos\frac{\theta_i}{2} & -\sin\frac{\theta_i}{2}\\ \sin\frac{\theta_i}{2} & \cos\frac{\theta_i}{2}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi\\ \sin\pi & \cos\pi\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}$.

(9.) За нормалне операторе T важи да је $\operatorname{Im} T=\operatorname{Im} T^*$. Нека су $v\in U^\perp$, $u\in$ U. Знамо да је $\langle u,v\rangle=0$. Такође, $T(u)\in U$, јер је U T-инваријантно, па је $\langle T(u),v\rangle=0=\langle u,T^*(v)\rangle$. u и v су били произвољни, па важи да је $T^*(v)\in U^\perp$ за свако $v\in U^\perp$. Пошто је $\operatorname{Im} T^*|_{U^\perp}=U^\perp$, то је и $\operatorname{Im} T|_{U^\perp}=U^\perp$