1.
$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\2&3&\alpha&5\\1&\alpha&3&3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-2)\\ (-1)\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\0&1&\alpha+2&\boxed{1}\\0&\alpha-1&4&1\end{bmatrix}(-1)\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\0&1&\alpha+2&\boxed{1}\\0&\alpha-2&2-\alpha&0\end{bmatrix}$$

1° За $\alpha=2$, $\operatorname{rang} A=2$; 2° За $\alpha\neq 2$, $\operatorname{rang} A=3$

2.
$$\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&a\\1&1&\dots&a&1\\\vdots&&&&\vdots\\1&a&\dots&1&1\\a&1&\dots&1&1\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&a+(n-1)\\1&1&\dots&a&a+(n-1)\\\vdots&&&&\vdots\\1&a&\dots&1&a+(n-1)\\a&1&\dots&1&a+(n-1)\end{vmatrix}_{n\times n}(-1)=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&a+(n-1)\\0&0&\dots&a-1&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&a-1&\dots&0&0\\a-1&0&\dots&0&0\end{vmatrix}_{n\times n}=$$

Ван дијагонале и 1. реда су све нуле, на дијагонали су $a-1$.

$$=(-1)^{1+n}\cdot(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1&\dots&1&a+(n-1)\\0&\dots&a-1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a-1&\dots&0&0\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=\dots=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot\ldots\cdot(-1)^{1+3}\cdot(a-1)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix}1&a+(n-1)\\a-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot\ldots\cdot(-1)^{1+3}\cdot(-1)^{1+2}\cdot(a-1)^{n-1}\cdot(a+(n-1))=(-1)^{3+4+5+\dots+n+(n+1)}\cdot(a-1)^{n-1}\cdot(a+(n-1))=$$

$$=(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3}\cdot(a-1)^{n-1}\cdot(a+(n-1))$$

3. Грасманова формула нам каже да за било која два векторска потпростора од V важи: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$.

Дакле, важи
$$\dim(U_1+W)=\dim U_1+\dim W-\dim(U_1\cap W)$$
$$\dim(U_2+W)=\dim U_2+\dim W-\dim(U_2\cap W)$$

Са друге стране, $U_1\cap W=U_2\cap W=\{0\}$, па је $\dim(U_1\cap W)=\dim(U_2\cap W)=0$

Коначно, $U_1+W=U_2+W$, одакле $\dim(U_1+W)=\dim(U_2+W)$, због чега
$$\dim U_1+\cancel{\dim W}=\dim U_2+\cancel{\dim W}$$
$$\dim U_1=\dim U_2$$

4. $(a+bX+cX^2)\circ(\alpha+\beta X+\gamma X^2) = a\alpha + 2b\beta + 2c\gamma - a\beta - b\alpha - b\gamma - c\beta$

1) Да ли је $\circ$ комутативно?

$(\alpha+\beta X+\gamma X^2)\circ(a+bX+cX^2) = \alpha a + 2\beta b + 2\gamma c - \alpha b - \beta a - \beta c - \gamma b =$

$= (a+bX+cX^2)\circ(\alpha+\beta X+\gamma X^2)$

2) Да ли је $\circ$ линеарно по координатама?

$[\lambda_1(a+bX+cX^2)+\lambda_2(p+qX+rX^2)]\circ(\alpha+\beta X+\gamma X^2) = (\lambda_1 a+\lambda_2 p)\alpha + 2(\lambda_1 b+\lambda_2 q)\beta +$

$+2(\lambda_1 c+\lambda_2 r)\gamma - (\lambda_1 a+\lambda_2 p)\beta - (\lambda_1 b+\lambda_2 q)\alpha - (\lambda_1 b+\lambda_2 q)\gamma - (\lambda_1 c+\lambda_2 r)\beta =$

$= \lambda_1\cdot(a\alpha+2b\beta+2c\gamma-a\beta-b\alpha-b\gamma-c\beta)+\lambda_2(p\alpha+2q\beta+2r\gamma-p\beta-q\alpha-q\gamma-r$

$=\lambda_1(a+bX+cX^2)\circ(\alpha+\beta X+\gamma X^2)+\lambda_2(p+qX+rX^2)\circ(\alpha+\beta X+\gamma X^2)$

3) Да ли је $p(X)\circ p(X)\geq 0,\ \forall p\in\mathbb{R}^3[X]$, и $p(X)\circ p(X)=0 \Leftrightarrow p\equiv 0$?

$(a+bX+cX^2)\circ(a+bX+cX^2) = a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc = a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+c^2\geq 0$ – ово је једнако нули акко важи: $a-b=0$, $b-c=0$, $c=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=b=c=0}$ $\circ$ је скаларни производ.

Нека је $e=[e_1,e_2,e_3]=[1,X,X^2]$ канонска база. Грам-Шмитови поступком ћемо добити ортонормирану базу $[g_1,g_2,g_3]=g$:

$g_1=\frac{1}{\|e_1\|}\cdot e_1$, $\|e_1\|=\sqrt{1\circ 1}=1 \Rightarrow \boxed{g_1=e_1=1;}$

$g_2'=\alpha\cdot g_1+e_2$, $0=\langle g_2',g_1\rangle=\alpha\cdot\|g_1\|^2+\langle e_2,g_1\rangle=\alpha+\langle X,1\rangle$

$\langle X,1\rangle=-1 \Rightarrow 0=\alpha-1\Rightarrow\alpha=1 \Rightarrow g_2'=1+X$

$\|g_2'\|=\sqrt{(1+X)\circ(1+X)}=\sqrt{1+\cancel{2}-\cancel{1}-\cancel{1}}=1 \Rightarrow \boxed{g_2=g_2'=1+X}$

$g_3'=\beta\cdot g_1+\gamma\cdot g_2+e_3$, $0=\langle g_3',g_1\rangle=\beta+\langle 1,X^2\rangle=\beta$, $0=\langle g_3',g_2\rangle=\gamma+\langle 1+X,X^2\rangle=$

$=\gamma-1 \Rightarrow \gamma=1 \Rightarrow g_3'=1+X+X^2$

$\|g_3'\|=\sqrt{(1+X+X^2)\circ(1+X+X^2)}=\sqrt{1+\cancel{2}+\cancel{2}-\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}}=1\Rightarrow g_3=g_3'=1+X+X^2$

2 Дакле, $g=[1,1+X,1+X+X^2]$.

5. $L: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $L(X) = A\cdot X + X\cdot B$, $A=\begin{bmatrix}3&5\\0&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6&8\\-2&-4\end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $L(X)=\begin{bmatrix}3&5\\0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6&8\\-2&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+5c&3b+5d\\-2c&-2d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6a-2b&8a-4b\\6c-2d&8c-4d\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9a-2b+5c&8a-b+5d\\4c-2d&8c-6d\end{bmatrix}$. Одавде видимо да је $L(\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{E_1})=\begin{bmatrix}9&8\\0&0\end{bmatrix}$,

$L(\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{E_2})=\begin{bmatrix}-2&-1\\0&0\end{bmatrix}$, $L(\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}_{E_3})=\begin{bmatrix}5&0\\4&8\end{bmatrix}$, $L(\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{E_4})=\begin{bmatrix}0&5\\-2&-6\end{bmatrix}$, па је

$T=[L]_e=\begin{bmatrix}9&-2&5&0\\8&-1&0&5\\0&0&4&-2\\0&0&8&-6\end{bmatrix}$.

Карактеристични полином: $\chi_L(x)=\begin{vmatrix}9-x&-2&5&0\\8&-1-x&0&5\\0&0&4-x&-2\\0&0&8&-6-x\end{vmatrix}=(-6-x)\cdot\begin{vmatrix}9-x&-2&5\\8&-1-x&0\\0&0&4-x\end{vmatrix}$

$+(-1)\cdot 8\cdot\begin{vmatrix}9-x&-2&0\\8&-1-x&5\\0&0&-2\end{vmatrix}=(-6-x)\cdot(4-x)\cdot\begin{vmatrix}9-x&-2\\8&-1-x\end{vmatrix}+16\cdot\begin{vmatrix}9-x&-2\\8&-1-x\end{vmatrix}=$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\begin{cases}-4\\2\end{cases}$ $\qquad x_{3,4}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\begin{cases}7\\1\end{cases}$

$=[(x^2+2x-24)+16]\cdot\begin{vmatrix}9-x&-2\\8&-1-x\end{vmatrix}=(x^2+2x-8)\cdot(x^2-8x+7)=(x+4)(x-1)(x-2)$

$\cdot(x-7)$. Дакле, $\chi_L(x)=(x+4)(x-1)(x-2)(x-7)$, па је самим тим и $m_L(x)=(x+4)^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-2)^{k_3}(x-7)^{k_4}$, где су k_i такви да је $1\le k_i\le d_i$, за $\chi_L(x)=(x+4)^{d_1}(x-1)^{d_2}(x-2)^{d_3}(x-7)^{d_4}$. Но, овде су $d_i=1$, па су сви $k_i=1 \Rightarrow m_L(x)=\chi_L(x)$.

$L^n=?$ Посматрајмо количник полинома x^n са $m_L(x)$:

$$x^n=p_n(x)\cdot m_L(x)+q_n(x),\quad \deg q_n<\deg m_L=4$$

$$q_n(x)=a_n+b_nx+c_nx^2+d_nx^3.\quad q_n(x)=?$$

$x=1$: $1^n=p_n(1)\cdot\underbrace{m_L(1)}_{0}+q_n(1)=\boxed{a_n}+b_n+c_n+d_n$ $\quad (-1)$

$x=2$: $2^n=a_n+2b_n+4c_n+8d_n$

$x=7$: $7^n=a_n+7b_n+49c_n+343d_n$

$x=-4$: $(-4)^n=a_n-4b_n+16c_n-64d_n$

$\boxed{a_n}+b_n+c_n+d_n=1$

$\boxed{b_n}+3c_n+7d_n=2^n-1$ $\quad (-6)$

$6b_n+48c_n+342d_n=7^n-1$

$-5b_n+15c_n-65d_n=(-4)^n-1$