1. $$\begin{aligned} x+y+z&=a\\ x+(1+a)y+z&=2a\\ x+y+(1+a)z&=0\end{aligned}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+a&1\\1&1&1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{vmatrix}=a^2$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}a&1&1\\2a&1+a&1\\0&1&1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&1\\0&a-1&-1\\0&1&1+a\end{vmatrix}=a\cdot[(a+1)(a-1)+1]=a^3$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2a&1\\1&0&1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&1\\0&a&0\\0&-a&a\end{vmatrix}=a^2 \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&1+a&2a\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\0&a&a\\0&0&-a\end{vmatrix}=-a^2$$

Видимо да је $\Delta=0 \iff a=0$.

1° $a\neq 0$: Систем има јединствено решење: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{a^3}{a^2}=a$, $y=\frac{a^2}{a^2}=1$, $z=\frac{-a^2}{a^2}=-1$

2° $a=0$: Тада је $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, па нам Крамерова метода не даје информације о решењима система.

$a=0$: $$\begin{aligned} \boxed{x}+y+z&=0\\ x+y+z&=0\\ x+y+z&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{x}+y+z&=0\\ 0&=0\\ 0&=0\end{aligned}$$

$\boxed{y,z\in\mathbb{R}}$, $\boxed{x=-y-z}$

Скуп решења је ~~$\{(-y-z)$~~ $\{(-y-z,y,z): y,z\in\mathbb{R}\}$

2. $$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\2&3&\alpha&5\\1&\alpha&3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\0&1&\alpha+2&\boxed{1}\\0&\alpha-1&4&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&-1&2\\0&1&\alpha+2&\boxed{1}\\0&\alpha-2&2-\alpha&0\end{bmatrix}$$

1° $\alpha=2 \Rightarrow \operatorname{rang} A=2$ $\qquad$ 2° $\alpha\neq 2\Rightarrow \operatorname{rang} A=3$

3. $$A=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&a\\1&1&\cdots&a&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a&\cdots&1&1\\a&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&a+(n-1)\\1&1&\cdots&a&a+(n-1)\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a&\cdots&1&a+(n-1)\\a&1&\cdots&1&a+(n-1)\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&a+(n-1)\\0&0&\cdots&a-1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a-1&\cdots&0&0\\a-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{n\times n}$$

~~(ван главне~~ ван дијагонале (осим у првом реду) су све нуле

$$A=(-1)^{n+1}\cdot(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1&\cdots&1&a+(n-1)\\0&\cdots&a-1&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a-1&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=\ldots=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{(n-1)+1}\cdot\ldots\cdot(-1)^{3+1}\cdot(a-1)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix}1&a+(n-1)\\a-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+\ldots+4+3}\cdot(a-1)^{n-1}\cdot(a+(n-1))=(-1)^{\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}-3}\cdot(a-1)^{n-1}(a+(n-1))$$

4. По Грасмановој формули, за било која два векторска потпростора U и W од V важи: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

Затим, пошто је $U_1\cap W=U_2\cap W=\{0\}$, то је $\dim(U_1\cap W)=\dim(U_2\cap W)=0$

На крају, важи $U_1+W=U_2+W$, па је $\dim(U_1+W)=\dim(U_2+W)$.

Даље:
$$\dim(U_1+W)=\dim(U_2+W)$$
$$\dim U_1+\cancel{\dim W}-\underbrace{\dim(U_1\cap W)}_{0}=\dim U_2+\cancel{\dim W}-\underbrace{\dim(U_2\cap W)}_{0}$$
$$\dim U_1=\dim U_2$$

5.
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+\boxed{x_3}&=0\\ x_1+3x_2+2x_3-\boxed{x_4}&=0\end{aligned}$$

$\boxed{x_1,x_2\in\mathbb{R}}$, $\boxed{x_3=x_2-2x_1}$, $\boxed{x_4=x_1+3x_2+2x_3=x_1+3x_2+2x_2-4x_1=-3x_1+5x_2}$

Скуп решења: $S=\{(x_1,x_2,-2x_1+x_2,-3x_1+5x_2):x_1,x_2\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Lin}((1,0,-2,-3),(0,1,1,5))$

Допунимо базу S векторима $(0,0,1,0)$ и $(0,1,0,0)$:

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&-2&-3\\0&1&1&5\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\overset{(-1)}{\sim}\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&-2&-3\\0&0&1&5\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&\boxed{1}&0\end{bmatrix}\overset{(-1),\,2}{\sim}\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&-3\\0&0&0&\boxed{5}\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&\boxed{1}&0\end{bmatrix}\overset{\cdot\frac{3}{5}}{\sim}\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0\\0&0&0&\boxed{5}\\0&\boxed{1}&0&0\\0&0&\boxed{1}&0\end{bmatrix}$$

Ови вектори јесу линеарно независни, па чине базу $\mathbb{R}^4$.
Сада тражимо матрицу прелаза са ове базе g на канонску базу e, тј. матрицу $P\in M_4(\mathbb{R})$ такву да је $e=g\cdot P$

$e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$

$g_1=(1,0,-2,-3)$, $g_2=(0,1,1,5)$, $g_3=(0,1,0,0)$, $g_4=(0,0,1,0)$.

Одмах видимо да је $e_2=g_3$, $e_3=g_4$.

$e_1=\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3+\delta g_4=(\alpha,0,-2\alpha,-3\alpha)+(0,\beta,\beta,5\beta)+(0,\gamma,0,0)+(0,0,\delta,0)=(1,0,0,0)$

$$\cancel{\alpha = 1, \beta+\gamma = 0}$$

$$\begin{array}{llll} \boxed{\alpha} & & = 1 & \cdot 2 \quad \cdot 3 \\ & \beta + \gamma & = 0 & \\ -2\alpha + \beta + & \delta & = 0 & \\ -3\alpha + 5\beta & & = 0 & \\ \hline \boxed{\alpha} & & = 1 & \\ & \beta + \gamma & = 0 & \\ & \beta + \delta & = 2 & \\ & 5\boxed{\beta} & = 3 & \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \boxed{\alpha} & = 1 \\ \boxed{\gamma} & = -\frac{3}{5} \\ \boxed{\delta} & = \frac{7}{5} \\ 5\boxed{\beta} & = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{\alpha = 1,\ \beta = \frac{3}{5},\ \gamma = -\frac{3}{5},\ \delta = \frac{7}{5}}$$

Даље, $e_1 = g_1 + \frac{3}{5} g_2 - \frac{3}{5} g_3 + \frac{7}{5} g_4$

$e_4 = a g_1 + b g_2 + c g_3 + d g_4 = (a, 0, -2a, -3a) + (0, b, b, 5b) + (0, c, 0, 0) + (0, 0, d, 0) =$
$= (0, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{llll} \boxed{a} & & = 0 & \cdot 2 \quad \cdot 3 \\ & b + c & = 0 & \\ -2a + b & + d & = 0 & \\ -3a + 5b & & = 1 & \\ \hline \boxed{a} & & = 0 & \\ & b + c & = 0 & \\ & b + d & = 0 & \\ & 5\boxed{b} & = 1 & \left(-\frac{1}{5}\right) \ /:5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \boxed{a} & = 0 \\ \boxed{c} & = -\frac{1}{5} \\ \boxed{d} & = -\frac{1}{5} \\ \boxed{b} & = \frac{1}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{a = 0,\ b = \frac{1}{5},\ c = d = -\frac{1}{5}}$$

Даље, $e_4 = \frac{1}{5} g_2 - \frac{1}{5} g_3 - \frac{1}{5} g_4$

$$e = g \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$ — ово је тражена матрица

6. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_4)$

$\ker T = ?\quad \operatorname{Im} T = ?$

<u>$\ker T$:</u> Нека $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker T$. Тада је $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_4) =$
$= (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} x_1 + \boxed{x_2} & = 0 \\ x_2 - \boxed{x_3} & = 0 \\ x_1 + \boxed{x_4} & = 0 \\ \hline \end{array}$$

$\boxed{x_1 \in \mathbb{R}},\ \boxed{x_2 = -x_1},\ \boxed{x_3 = x_2 = -x_1},\ \boxed{x_4 = -x_1}$

$\Rightarrow \ker T = \{(x_1, -x_1, -x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1 \cdot (1, -1, -1, -1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Lin}((1, -1, -1, -1))$

~~$\operatorname{Im}T$: $\operatorname{Im}T = \{T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{x_1 \cdot (1, 0, 1) + x_2 (1, 1, 0)$~~