Rešenja sa popravnog kolokvijuma 15/16

1. Rešenje ovog zadatka se može naći u knjizi.

2. Pomnožimo izraz $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$ sa leve strane sa $A + B$. Dobijamo:

$$E + BA^{-1} + AB^{-1} + E = E,$$

$$AB^{-1} + BA^{-1} = -E,$$

gde je E jedinična matrica. Ako sa X obeležimo matricu AB^{-1}, onda imamo da je $X + X^{-1} = -E$, odnosno $X^{-1} = -X - E$. Pomnožimo izraz $X + X^{-1} = -E$ sa X. Dobijamo $X^2 + E = -X$, odnosno $X^2 = -X - E = X^{-1}$. Dakle, kada pomnožimo ovo sa X, imamo da je

$$X^3 = E,$$

pa je $\det X^3 = (\det X)^3 = 1$, odakle sledi da je $\det X = \frac{\det A}{\det B} = 1$, zbog čega je $\det A = \det B$.

3. Neka je $p(X) = a + bX + cX^2$ proizvoljan element $\mathbb{R}^2[X]$ ($p(0) = a$, $p'(0) = b$). Tada je:

$$L(p) = (X + 4) \cdot a + \left(X^2 + X\right) \cdot b.$$

Neka je $q(X) = d + eX + fX^2$ neki drugi element $\mathbb{R}^2[X]$, i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$L(p + q) = L\left((a + d) + (b + e)X + (c + f)X^2\right) =$$

$$= (X+4)\cdot(a+d)+\left(X^2 + X\right)\cdot(b+e) = (X+4)\cdot a+\left(X^2 + X\right)\cdot b+(X+4)\cdot d+$$

$$+ \left(X^2 + X\right) \cdot e = L(p) + L(q);$$

$$L(\lambda p) = (X+4)\cdot\lambda a + \left(X^2+X\right)\cdot\lambda b = \lambda\left((X+4)\cdot a + \left(X^2+X\right)\cdot b\right) = \lambda L(p).$$

Dakle, L je linearno.

Dalje, tražimo matricu operatora L u odnosu na kanonsku bazu: $L(1) = L\left(1\cdot 1 + 0X + +X^2\right) = 4 + X$, $L(X) = X + X^2$, $L(X^2) = 0$. Dakle, matrica operatora L je:

$$[L]_e = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada tražimo baze za ImL i $KerL$. Za $KerL$, posmatrajmo jednačinu $L(p) = 0$:

$$a(4+X) + b\left(X + X^2\right) = (4a) + (a+b)X + bX^2 = 0,$$

odakle se vidi da mora biti $a = b = 0$, a c može biti bilo šta. Dakle, $KerL = \{cX^2 \in \mathbb{R}^2[X] : c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}\,(X^2)$. Dakle, baza za $KerL$ je $\{X^2\}$.

Za ImL, uočimo da je

$$ImL = \left\{L(p) \in \mathbb{R}^2[X] : p \in \mathbb{R}^2[X]\right\} =$$

$$= \left\{a(4+X) + b\left(X+X^2\right) \in \mathbb{R}^2[X] : a, b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Lin}\left(4+X, X+X^2\right).$$

Dakle, baza za ImL je $\{4+X, X+X^2\}$.

Sada proveravamo da li je skup vektora $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ baza za $\mathbb{R}^2[X]$: Pošto ih ima tri (koliko je dimenzija vektorskog prostora), dovoljno je proveriti njihovu linearnu nezavisnost:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ovi vektori jesu linearno nezavisni, pa čine bazu. Nađimo matricu operatora L u odnosu na bazu f:

$$L(f_1) = L\left(2 + X^2\right) = 8 + 2X,$$

$$L(f_2) = X + X^2,$$

$$L(f_3) = -2X - 2X^2.$$

Sada treba izraziti $8+2X$ u bazi f: $8+2X = a_1\,(2 + X^2) + b_1\,(X - X^2) + c_1\,(-2X + X^2) = 2a_1 + (b_1 - 2c_1)X + (a_1 - b_1 + c_1)X^2$. Dakle, imamo sistem:

$$\begin{array}{cccc} 2a_1 & & & = 8 \\ & b_1 & -2c_1 & = 2 \\ a_1 & -b_1 & +c_1 & = 0 \end{array},$$

odakle imamo da je $a_1 = 4$, $b_1 = 6$ i $c_1 = 2$ (tj. $L(f_1) = 4\,(2 + X^2) + 6\,(X - X^2) + 2\,(-2X + X^2)$).

Dalje, $X + X^2 = 2a_2 + (b_2 - 2c_2)X + (a_2 - b_2 + c_2)X^2$, pa imamo sistem:

$$\begin{array}{cccc} 2a_2 & & & = 0 \\ & b_2 & -2c_2 & = 1 \\ a_2 & -b_2 & +c_2 & = 1 \end{array},$$

odakle je $a_2 = 0$, $b_2 = -3$ i $c_2 = -2$ (tj. $L(f_2) = 0\,(2 + X^2) - 3\,(X - X^2) - 2\,(-2X + X^2)$).

Na kraju, $L(f_3) = -2L(f_2)$, pa je $L(f_3) = 0\,(2 + X^2) + 6\,(X - X^2) + 4\,(-2X + X^2)$. Dakle, matrica je:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$