1 Simetričan operator i ortogonalna matrica

Definicija 1.1. Operator $L : V \to V$ na euklidskom vektorskom prostoru je simetričan ako je njegova matrica $[L]_e$ simetrična za svaku <u>*ortonormiranu*</u> bazu.

Važe sledeća tvrđenja:

Tvrđenje 1.2. *Ako je $L : V \to V$ simetričan operator, tada za sve vektore $u, v \in V$ važi*

$$L(u) \circ v = u \circ L(v).$$

Tvrđenje 1.3. *Operator $L : V \to V$ je simetričan ako i samo ako ima dijagonalnu matricu u odnosu na bar jednu ortonormiranu bazu.*

Dakle, svaki simetričan operator je dijagonalnog tipa. Što se tiče matrica, imamo ovo:

Tvrđenje 1.4. *Ako je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična (dakle $A = A^T$), tada postoje invertibilna matrica $P \in M_n(\mathbb{R})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $P^{-1} = P^T$, i $P^T A P = D$.*

Za intvertibilnu matricu P za koju je $p^{-1} = P^T$ kažemo da je *ortogonalna* matrica.

Biće nam korisna i sledeća činjenica: Za simetričan linearni operator, sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima su međusobno ortogonalni: Ako je $L(u) = au$ i $L(v) = bv$, tada

$$a(u \circ v) = L(u) \circ v = u \circ L(v) = b(u \circ v),$$

pa pošto su sopstvene vrednosti različite, to mora biti $u \perp v$.

Na kraju, neka je matrica $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna, i obeležimo $P = [P_1 \dots P_n]$ i $P^T = \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix}$, pri čemu su P_i^T i-ta vrsta od P_T, pa je jednaka i-toj koloni P. Tada je $E = P^T P = [P_i^T P_j] = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, pa vidimo da kolone matrice P čine ortonormiranu bazu $\mathbb{R}^n$ u odnosu na standardni skalarni proizvod. v Štaviše, važi sledeće:

Tvrđenje 1.5. *Matrica $P \in M_n(\mathbb{R})$ je ortogonalna ako i samo ako njene kolone čine ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^n$.*

1. **a)** Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ naći ortogonalnu matricu P i dijagonalnu matricu D za koje je $P^T AP = D$.

Prvo, nađimo sopstvene vektore. Karakterističan polinom je $\varphi_A(X) = (8 - X)(-1 - X)^2$. Imamo da je $Ker(A + E) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, i $Ker(A - 8E) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Da smo samo tražili bilo koju invertibilnu matricu P, ovde bismo stavili da matrica P ima ove vektore kao kolone. Međutim, mi takođe tražimo i da je matrica ortogonalna, pa moramo da ortonormiramo ovu bazu. Znamo da su kod simetričnih operatora/matrica sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima međus ortogonalni, pa samo treba da ortonormiramo bazu $Ker(A+E)$, i da normiramo bazu $Ker(A - 8E)$.

Dakle imamo kolone $P_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $P_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $P_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, i želimo da ortonormiramo ovu bazu. Prvi vektor će biti $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, drugi će biti $P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Na kraju, iz prethodne diskusije imamo da je P_3' normalan na prethodna dva vektora, i treba ga samo normirati: $P_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Dakle,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. **b)** Neka je sada $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Ovde je karakterističan polinom jednak $\varphi_A(X) = X^2 - X - 20 = (5-X)(-4-X)$. Imamo da je $Ker(A-5E) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$, i $Ker(A+4E) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Dakle, $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $P_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $P_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Prema tome,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

1. **c)** Neka je sada $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Dokazati da za simetričan operator $L : V \to V$ važi $Ker(L) \perp Im(L)$.

3. Neka je $f = [(2,-1,2), (-2,4,-5), (7,1,7)]$ baza $V = \mathbb{R}^3$, i neka je $L : V \to V$ operator na V zadat matricom

$$[L]_f = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za koje a će L biti simetričan operator (Iako matrica operatora nije simetrična u bazi f, on može biti simetričan, jer f nije ortonormirana baza. Dakle, treba ortonormirati bazu f u novu bazu g i videti da li je matrica operatora L u novoj bazi g simetrična)?

Ako je L simetričan operator, naći zatim ortonormiranu bazu h za koju je $[L]_h$ dijagonalno. Da li je matrica prelaska $P_{f\to h}$ ortogonalna? A $P_{g\to h}$?

2 Bilinearne i kvadratne forme

Definicija 2.1. Za vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{K}$, preslikavanje $B : V \times V \to \mathbb{K}$ je bilinearna forma ako je B linearno po obe koordinate, tj.

$$B(au + bv, w) = aB(u, w) + bB(v, w),$$

$$B(u, av + bw) = aB(u, v) + bB(u, w)$$

Neka je V vektorski prostor, i neka je $e = [e_1, \dots, e_n]$ njegova baza. Tada je

$$B(u, v) = B(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j B(e_i, e_j) = u_e^T [B]_e v_e,$$

pri čemu su $[B]_e = [B(e_i, e_j)]_{i,j=1}^n$, a u_e i v_e kolone koordinata vektora u i v. Matricu $[B]_e$ zovemo matricom bilinearne forme B. Ako je $f = eP$ nova baza, tada matrica bilinearne forme postaje

$$[B]_f = P^T [B]_e P.$$

Rang matrice forme se ne menja sa promenom baze, pa definišemo rang bilinearne forme B sa $\rho(B) = \rho([B]_e)$ (za bilo koju bazu e).

Definicija 2.2. Bilinearna forma B je simetrična ako za sve $u, v \in V$ važi $B(v, u) = B(u, v)$.

Forma B će biti simetrična ako i samo ako je matrica simetrična u bilo kojoj bazi.

Definicija 2.3. Preslikavanje $F : V \to \mathbb{K}$ zovemo kvadratnom formom ako postoji bilinearna forma B takva da je $F(u) = B(u, u)$

Primetimo da važi $F(\lambda u) = \lambda^2 F(u)$. Za bilo koju kvadratnu formu moguće je izabrati simetričnu bilinearnu formu koja joj odgovara. Naime možemo definisati **polarizaciju kvadratne forme** F, na sledeći način:

$$Pol(F)(u,v) = \frac{1}{2}F((u+v) - F(u) - F(v)).$$

Lako se proveri da je ovo bilinearna forma, i da je $F(u) = Pol(F)(u,u)$. Definišemo matricu kvadratne forme sa $[F]_e := [Pol(F)]_e$, i $\rho(F) = \rho(Pol(F))$. Obeležimo ovu matricu sa $A = [a_{ij}]$. Polarizacija kvadratne forme je simetrična, pa je $a_{ij} = a_{ji}$. Dakle, imamo

$$F(u) = u_e^T A u_e = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Drugim rečima, ako je sa $F(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = a_{11}x_1^2 + \ldots a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$ zadata kvadratna forma F, tada ona u bazi e ima simetričnu matricu $[F]_e$ sa koeficijentima a_{ii} na dijagonali, a van dijagonale $\frac{1}{2}a_{ij}$ (dakle, na dijagonali se koeficijenti poklapaju sa koeficijentima u izrazu, a van nje su *upola manji*).

Pošto kvadratna forma uvek ima simetričnu matricu, može se naći baza $f = eP$ takva da je $[F]_f$ dijagonalna. Međutim, pri promeni baze, matrica kvadratne forme postaje

$$[F]_f = P^T [F]_e P,$$

tako da matrica P **mora biti ortogonalna** (jer u izrazu nemamo P^{-1})!

Neka je sada $\mathbb{R}$. U ovom slučaju možemo tražiti i sledeće: da matrica ima prvo jedinice na dijagonali, zatim -1, i na kraju nule:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{bmatrix}.$$

Kažemo da F u ovoj bazi ima **kanonsku formu**. Broj pozitivnih, negativnih i nula koeficijenata ostaje isti pri skaliranju, pa ovi brojevi ostaju konstantni pri promeni baze. Ako ima p jedinica i q negativnih koeficijenata, tada je $\rho(F) = p + q$. Par brojeva (p, q) zovemo **signaturom kvadratne forme** F. Kvadratna forma F je

Pozitivno definitna	ako je signatura $(n, 0)$, tj. $F(v) > 0$ za sve $v \in v$,
Nenegativna	ako je signatura $(p, 0)$, $p \leqslant n$, tj. $F(v) \geqslant 0$,
Negativno definitna	ako je signatura $(0, n)$, tj. $F(v) < 0$ za sve $v \in V$,
Nepozitivna	ako je signatura $(0, q)$, $q \leqslant n$, tj. $F(v) \leqslant 0$,

1. **a)** Neka je kvadratna forma zadata sa

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 8xy + 4xz - 4yz.$$

Naći bazu u kojoj F ima kanonsku formu, kao i signaturu i rang forme F.

U kanonskon bazi, forma F ima matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Prvo treba naći ortogonalnu matricu P za koju je $P^T A P$ dijagonalna matrica (A je simetrična matrica, pa ona postoji). Ovo je zadatak 1. b). Imamo prema tome da u bazi $f = eP = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$ forma F ima matricu $[F]_f = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Sada treba skalirati bazu kako bismo imali jedinice i -1 na dijagonali. Imajući u vidu da je F kvadratna forma, kada uzmemo bazu $g_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} f_1$, $g_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} f_2$ i $g_3 = \frac{1}{2} f_3$, forma F će u njoj imati matricu traženog oblika:

$$[F]_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, signatura forme F je $(2, 1)$, a rang je $\rho(F) = 3$.

1. **b)** Isto za $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

1. **c)** Isto za $F(x, y, z) = -2xy + 2xz + 2yz$.