Линеарна алгебра, испит септембар, ток 1О2, 2.9.2021

1. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ay & + & az & = & -a \\ -x & + & ay & + & z & = & a \\ -ax & + & y & + & (a+1)z & = & 2 \end{array}$$

2. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Нека је U скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ таквих да је $XB = 0$, а W скуп свих матрица $X \in M_2(\mathbb{R})$ за које важи $XA^TA - BX = 0$. Одредити базе и димензије за U, W, $U + W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ пресликавање дефинисано са

$$L(a + bX + cX^2) = (-a - 2b + 3c) + (a + 2b + c)X + cX^2.$$

   (а) Доказати да је L линеарни оператор.

   (б) Одредити бар једну базу за $\mathrm{Ker}L$ и $\mathrm{Im}L$.

   (ц) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и минимални и карактеристични полином.

   (д) Наћи сопствене потпросторе од L.

4. Нека је $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ пресликавање дато са

$$(x, y, z) \circ (a, b, c) = 3xa + 2yb + 2zc + 2za + 2xc$$

   (а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.

   (б) Наћи ортонормирану базу у односу на $\circ$.

   (ц) Одредити удаљеност вектора $v = (1, 1, 1)$ од простора $U = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.