Линеарна алгебра, испит септембар 2, ток 1О2, 18.9.2021

1. Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

2. Дати су скупови $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$ и $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0\}$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Одредити базу и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Дато је пресликавање $L : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$ са

$$L(P) = (2X^2 - X + 1)P(1) + (X-1)P'(1) - (X-1)^2(P(0) + P'(0)).$$

   (а) Доказати да је L линеарно пресликавање.

   (б) Одредити матрицу оператора L у односу на канонску базу e, као и његов карактеристични и минимални полином.

   (ц) Испитати да ли је L дијагоналног типа. Ако јесте, одредити базу у којој је његова матрица дијагонална.

   (д) Одредити $L^n(a + bX + cX^2)$.

4. Дато је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ са

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4.$$

   (а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.

   (б) Ако је $U = \mathcal{L}((2,0,1,1), (-2,1,2,-1))$, одредити бар једну ортонормирану базу U и $U^\perp$.

   (ц) Одредити растојање вектора $v = (0,4,3,4)$ од U и $U^\perp$.