

**Испит из линеарне алгебре, јун, 102, 7.6.2021.**

1. Нека су  $U = \{P \in \mathbb{R}^4[X] : P(1) = P'(1)\}$  и  $W = \{P \in \mathbb{R}^4[X] : P(X) = -P(-X)\}$ . Одредити базу и димензију за  $U, W, U + W$  и  $U \cap W$ .
2. Нека је  $L : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$  дато са

$$L(P) = (P(1) - P'(1), 2P(0) + P'(-1), P(1) + P(-1) - 2P'(1)).$$

- (а) Доказати да је  $L$  линеарно пресликавање
  - (б) Одредити матрицу пресликавања  $L$  у односу на канонске базе.
  - (ц) Наћи базу и димензију за језгро и слику пресликавања  $L$ . Да ли је  $L$  1-1 или на?
3. Нека је пресликавање  $\circ : \mathbb{R}^3[X] \times \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисано са

$$P \circ Q = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

- (а) Доказати да је  $\circ$  скаларни производ.
  - (б) Ако је  $U = \{P \in \mathbb{R}^3[X] : P''(0) = 0\}$ , наћи бар једну ортонормирану базу за  $U$  и за  $U^\perp$  у односу на задат скаларни производ.
  - (ц) Одредити ортогоналну пројекцију  $P(X) = 2 + X + X^2$  на  $U$  и растојање од  $P$  до  $U$ .
4. Нека је  $e = [e_1, e_2, e_3]$  ортонормирана база  $\mathbb{R}^3$  у односу на стандардни скаларни производ  $\circ$ , и нека је пресликавање  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  дефинисано са

$$L(x) = (e_1 \circ x)(3e_1 - 2e_2) + (e_2 \circ x)(3e_2 - 2e_1) + 5(e_3 \circ x)e_3$$

- (а) Одредити матрицу линеарног оператора  $L$  у односу на базу  $e$ . Да ли је оператор симетричан?
- (б) Одредити бар једну ортонормирану базу  $f$  у којој оператор  $L$  има дијагоналну матрицу, и исписати матрицу оператора у тој бази.