Испит из линеарне алгебре, јул, 1О2, 24.6.2021.

1. Нека су $U = \mathcal{L}((1,3,-4,2),(2,1,-1,1),(5,0,1,1))$ и W скуп решења система

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 8z & + & 3t & = & 0 \\ -x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 \\ -3x & - & y & + & 20z & - & 5t & = & 0 \\ x & + & 3y & - & 12z & + & 7t & = & 0 \end{array}$$

   Одредити базу и димензију за $U, W, U+W$ и $U \cap W$.

2. Нека је $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ пресликавање дато са $L(X) = \frac{1}{2}(X + X^T)$.
   (а) Доказати да је L линеарни оператор.
   (б) Одредити базу и димензију за језгро и слику оператора L.
   (ц) Наћи матрицу оператора L у канонској бази, као и у бази $f = \left[\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]$

3. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
   (а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице.
   (б) Наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D т.д. $P^{-1}AP = D$.
   (ц) Наћи A^n, за $n \in \mathbb{N}$.

4. Нека је пресликавање $\circ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дефинисано са

$$(a,b,c) \circ (x,y,z) = 2ax + 2by + 2cz - ay - bx - bz - cy.$$

   (а) Доказати да је $\circ$ скаларни производ.
   (б) Одредити бар једну ортонормирану базу простора $\mathbb{R}^3$ у односу на овај скаларни производ.
   (ц) Ако је U скуп свих решења једначине $x - 2y + 3z = 0$, одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (0,1,4)$ на U, а затим и растојање од v до U.