

Испит из линеарне алгебре, август 102, 23.8.2021.

1. [13] Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 & 12 & \dots & 3(n-1) & 3n \\ 3 & 2 & 9 & 12 & \dots & 3(n-1) & 3n \\ 3 & 6 & 3 & 12 & \dots & 3(n-1) & 3n \\ 3 & 6 & 9 & 4 & \dots & 3(n-1) & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & (n-1) & 3n \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \dots & 3(n-1) & n \end{vmatrix}.$$

2. [17] Дато је пресликавање  $L : \mathbb{R}^4[X] \rightarrow \mathbb{R}^4[X]$  са  $L(P) = P'(1)X + P(-1)X^2 + 2P'$ .

- (а) Доказати да је  $L$  линеаран оператор.  
(б) Наћи бар по једну базу за  $\text{Ker}L$  и  $\text{Im}L$ . Да ли је оператор ињективан или сурјективан?  
(ц) Наћи матрицу оператора  $L$  у односу на канонску базу.  
(д) Одредити  $L^2(2X + X^2)$ .

3. [15] Нека је на векторском простору  $\mathbb{R}^4$  дефинисан скаларни производ

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \circ (y_1, y_2, y_3, y_4) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Одредити ортогоналну пројекцију вектора  $v = (4, -4, 2, 2)$  на простор  $U = \mathcal{L}((0, -1, -1, 1), (1, 0, -1, -1))$ , а затим наћи растојање између  $v$  и  $U$ .

4. [15] Наћи бар једну базу простора  $\mathbb{R}^3$  у којој квадратна форма

$$\Phi(x, y, z) = -4x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 2xy - 2yz + 2xz$$

има дијагонални облик.