Испит из елементарне теорије бројева, септембар, 3Л, 1.9.2021.

1. [10] У скупу целих бројева решити једначину
$$x^2 - 4x - y^2 - 2y = 4.$$
2. [10] Доказати да не постоји природан број n такав да је број $a = n(n+1)(n+2)(n+3)+5^n$ дељив са 4.
3. [10] Доказати да једначина $5^x + 6^y = 234567$ нема решења у скупу целих бројева.
4. [10] Да ли постоји цео број x такав да је $x^2 \equiv 43 \pmod{83}$?
5. [10] Наћи највећи заједнички делилац бројева $16 + 12i$ и $9 - 4i$.
6. [13] Наћи све природне бројеве који се завршавају са двема истим цифрама као и њихови квадрати.
7. [12] Нека је m природан број, и нека су $r_1, \dots, r_m$ позитивни рационални бројеви такви да је $r_1 + \cdots + r_m = 1$. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ функција дефинисана са
$$f(n) = n - [r_1 n] - \cdots - [r_m n].$$
Одредити минимум и максимум функције f.

Испит из елементарне теорије бројева, септембар, 3Л, 1.9.2021.

1. [10] У скупу целих бројева решити једначину
$$x^2 - 4x - y^2 - 2y = 4.$$
2. [10] Доказати да не постоји природан број n такав да је број $a = n(n+1)(n+2)(n+3)+5^n$ дељив са 4.
3. [10] Доказати да једначина $5^x + 6^y = 234567$ нема решења у скупу целих бројева.
4. [10] Да ли постоји цео број x такав да је $x^2 \equiv 43 \pmod{83}$?
5. [10] Наћи највећи заједнички делилац бројева $16 + 12i$ и $9 - 4i$.
6. [13] Наћи све природне бројеве који се завршавају са двема истим цифрама као и њихови квадрати.
7. [12] Нека је m природан број, и нека су $r_1, \dots, r_m$ позитивни рационални бројеви такви да је $r_1 + \cdots + r_m = 1$. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ функција дефинисана са
$$f(n) = n - [r_1 n] - \cdots - [r_m n].$$
Одредити минимум и максимум функције f.