1 Gram Šmitov postupak ortogonalizacije

Definicija 1.1. Baza $e = [e_1, \ldots, e_n]$ euklidskog vektorskog prostora je ortogonalna ako je $e_i \perp e_j$ za sve $i \neq j$, normirana ako je $||e_i|| = 1$ za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$, i ortonormirana ako je ortogonalna i normirana.

Neka je V euklidski vektorski prostor sa bazom $e = [e_1, \ldots, e_n]$. Neka su $u = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ i $v = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ iz V. Ako je e ortonormirana baza, tada je

$$u \circ v = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

Dakle, sa ortonormiranom bazom, skalarn proizvod se jednostavno računa. Međutim, nije svaka baza ortonormirana, pa nam je u interesu da od jedne baze e napravimo novu bazu g koja ima isti linearni omotač kao i e, a pritom je i ortonormirana. Štavise, važi sledeće

Tvrđenje 1.2 (Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije)**.** *Za svako bazu* $e = [e_1, \ldots, e_n]$ *postoji ortonormirana baza* $g = [g_1, \ldots, g_n]$ *takva da je* $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{L}(g_1, \ldots, g_k)$*, za svako* $k \in \{1, \ldots, n\}$*.*

Ova baza se nalazi na sledeći način: Prvo napravimo ortogonalnu bazu $g' = [g'_1, \ldots, g'_n]$, a zatim pomnožimo vektore te baze skalarima tako da svi budu norme 1 (dakle, uzmemo $g_i = \frac{1}{||g'_i||}g'_i$, jer norma ovakvog vektora će upravo biti 1, i množenje pozitivnim skalarom ne utiče na ugao između vektora).

Prvi vektor je tada $g'_1 = e_1$, a $g_1 = \frac{1}{||e_1||}e_1$. Recimo da sada imamo $k-1$ vektora baze g, i tražimo k-ti. Tada vektor g'_k mora biti u linealu vektora $e_1, \ldots, e_k$, što je ujedno i lineal vektora $g_1, \ldots, g_{k-1}, e_k$. Dakle vektor g_k ima oblik

$$g'_k = e_k + a_{k,1}g_1 + \cdots + a_{k,k-1}g_{k-1}.$$

Međutim, vektor g'_k mora biti ortogonalan na prethodne vektore, pa kada g'_k skalarno pomnožimo sa g_i ($i \in \{1, \ldots, k-1\}$), pošto su već dobijeni g_i normalni jedan na drugi i norme 1, dobijamo da je

$$0 = e_k \circ g_i + a_{k,i}||g_i||^2 = e_k \circ g_i + a_{k,i}.$$

Dakle, $a_{k,i} = -e_k \circ g_i$. Ovim postupkom smo dobili g'_k, a $g_k = \frac{1}{||g'_k||}g'_k$.

1. a) Gram Šmitovim postupkom ortonormirati bazu $e = [(1,-1,2), (0,-2,-1),(2,-1,1)]$ od $\mathbb{R}^3$, sa standardnim skalarnim proizvodom.

Prvi vekor je $g_1 = \frac{1}{||e_1||}e_1$, što je $g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$. Zatim, g_2' je jednako

$$g_2' = e_2 + ag_1.$$

Kao što smo prokomentarisali gore, tražimo da je g_2' normalno na g_1, što nam daje $a = -e_2 \circ g_1 = 0$, odakle je $g_2' = e_2$, pa je $g_2 = \frac{1}{||g_2'||}g_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,-1)$. Na kraju, g_3' je oblika

$$g_3' = e_3 + bg_1 + cg_2.$$

Isto kao i ranije, g_3' je normalno na g_1 i g_2, a pošto su g_1 i g_2 međusobno normalni, to je $b = -e_3 \circ g_1 = -\frac{5}{\sqrt{6}}$ i $c = -e_3 \circ g_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pa imamo

$$g_3' = (2,-1,1) - \frac{5}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,-1) = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{30}, -\frac{7}{15}\right).$$

Na kraju, $g_3 = \frac{1}{||g_3'||}g_3' = \frac{30}{\sqrt{18032}}(\frac{7}{6}, \frac{7}{30}, -\frac{7}{15}) = \frac{1}{\sqrt{18032}}(35,7,-14)$.

1. b) Ortonormirati bazu $e = [2+X+X^2, 3+3X, 4-X+X^2]$ od $\mathbb{R}^3[X]$ sa standardnim skalarnim proizvodom.

2. a) Ako je $\circ$ skalarni proizvod nad $\mathbb{R}^3[X]$ definisan sa

$$P \circ Q = \int_0^1 P(t)Q(t)dt,$$

ortonormirati bazu $e = [1, X, X^2]$.

Prvi vektor: $g_1 = \frac{1}{||1||}1$. $\sqrt{\int_0^1 1dt} = 1$, pa je $g_1 = 1$. Zatim, $g_2' = e_2 - (e_2 \circ g_1)g_1 = X - (X \circ 1)1 = X - \int_0^1 tdt = X - \frac{1}{2}$. Pošto je

$$||g_2'|| = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}},$$

to je $g_2 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$. Na kraju, imamo

$$g_3' = X^2 - (X^2 \circ 1)1 - (X^2 \circ \sqrt{3}(2X-1))\sqrt{3}(2X-1) =$$

$$= X^2 - \frac{1}{3} - (\frac{1}{2})(2X-1) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Kako je

$$||g_3'|| = \sqrt{\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}},$$

to je $g_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

2. **b)** Ako je $\circ$ skalarni proizvod nad $M_2(\mathbb{R})$ definisan sa

$$A \circ B = \mathrm{Tr}(B^T A),$$

ortonormirati bazu $e = \left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right]$.

2 Ortogonalni komplement

Definicija 2.1. Neka je V euklidski vektorski prostor, i W jedan njegov vektorski potprostor. Tada je ortogonalni komplement prostora W skup

$$W^\perp = \{u \in V \mid (\forall w \in W) u \perp w\}.$$

Ovaj skup će takođe biti jedan vektorski potprostor od V: ako su $u, v \in W^\perp$, $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in W$, tada je po definiciji $W^\perp$

$$(au + bv) \circ w = a(u \circ w) + b(v \circ w) = 0.$$

Tvrđenje 2.2. *Za vektorske prostore U i V važe sledeća svojstva:*

1. $(U^\perp)^\perp = U$,
2. $U \leqslant V \Rightarrow U^\perp \geqslant V^\perp$,
3. $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$,
4. $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

Takođe važi i ovo:

Tvrđenje 2.3. *Ako je V euklidski vektorski prostor, i W vektorski potprostor od V, tada je $V = W + W^{\perp}$. Prema tome, svaki vektor $v \in V$ se može na jedinstven način zapisati kao zbir*

$$v = w + w',$$

pri čemu je $w \in W$, a $w' \in W^{\perp}$. Vektor w je ortogonalna projekcija *vektora v na W, a w' je* ortogonalna dopuna vektora v *u odnosu na W.*

Definicija 2.4. Ako je W vektorski potprostor od euklidskog vektorskog prostora V i $v \in V$, onda je udaljenost između v i W definisana kao udaljenost između v i ortogonalne projekcije v na W, tj. $d(v, W) = d(v, w) = ||v - w|| = ||w^{\perp}||$. Slično, ugao između v i W je ugao između v i ortogonalne projekcije v na W, tj. $\angle(v, W) = \angle(v, w)$.

1. Ako je $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c - d = 0,\ 5a + 5b + 3c - 3d =\}$, naći U i $U^{\perp}$, ortogonalnu projekciju $v = (1, 1, 1, 1)$ na U, i $d(v, U)$ i $\angle(v, U)$. (Standarni skalarni proizvod)

Primetimo da je $U = (\mathcal{L}((1, 1, 1, -1), (5, 5, 3, -3)))^{\perp}$, pa pošto je $(U^{\perp})^{\perp} = U$, to je $U^{\perp} = \mathcal{L}((1, 1, 1, -1), (5, 5, 3, -3))$. Dalje, v se može zapisati kao $v = u + u^{\perp}$, pri čemu je $u \in U$, a $u^{\perp} \in U^{\perp}$. v Sta više, ako je $[]u_1, u_2]$ baza U, a $[u_3, u_4]$ baza $U^{\perp}$, tada je v oblika

$$v = au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4,$$

pri čemu je $au_1 + bu_2 = u$, a $cu_3 + du_4 = u^{\perp}$. Po defniciji, vektori iz baze $U^{\perp}$ su normalni na vektore iz baze U. Dakle, imamo da je

$$v \circ u_3 = cu_3 \circ u_3 + du_4 \circ u_3$$

$$v \circ u_4 = cu_3 \circ u_4 + du_4 \circ u_4,$$

što postaje

$$2 = 4c + 16d$$

$$10 = 16c + 68d$$

Dakle, $d = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{3}{2}$, pa je $u^{\perp} = (1,1,0,0)$, a $u = v - u^{\perp} = (0,0,1,1)$. Udaljenost od v do U je norma $u^{\perp}$, što je $\sqrt{2}$, a ugao između njih je ugao $\angle(v,u)$.

$$\cos(\angle(v,u)) = \frac{v \circ u}{||v|| \cdot ||u||} = \frac{2}{2\sqrt{2}},$$

pa je ugao između njih $\frac{\pi}{4}$.

Par Napomena

1. Kada je prostor U definisan sa uslovima na koordinatama kao u ovom zadatku ($U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c-d = 0,\ 5a+5b+3c-3d = \}$), nije $U = \mathcal{L}((1,1,1,-1),(5,5,3,-3))$, već je to $U^{\perp}$ (naravno, pod uslovom da se radi sa standardnim skalarnim proizvodom).

2. Ako imamo jedan od prostora U ili $U^{\perp}$, kao što smo videli u prethodnom zadatku, ako se ne traži $U^{\perp}$ ili U (tj. imamo samo jedan od ovih prostora), dovoljno je naći ili u ili $u^{\perp}$, a drugi se onda može naći kao razlika v i prvog.

3. Pošto je $(U^{\perp})^{\perp} = U$, ako bismo tražili rastojanje od v do $U^{\perp}$, ili ugao između njih, tada bismo imali $v = u^{\perp} + u$, gde sada u i $u^{\perp}$ menjaju uloge. Sada je u ortogonalna dopuna, a $u^{\perp}$ ortogonalna projekcija, pa je $d(v,U^{\perp}) = d(v,u^{\perp}) = ||u||$, i $\angle(v,U^{\perp}) = \angle(v,u^{\perp})$.

2. Neka je $U = \mathcal{L}((1,-2,0,2),(-2,4,1,-4))$. Naću $U^{\perp}$. Za $v = (1,-2,2,11)$, naći ortogonalnu projekciju i dopunu, kao i $d(v,U^{\perp})$ i $\angle(v,U^{\perp})$. (Standarni skalarni proizvod)

Tražimo sve vektore (a,b,c,d) koji su normalni na U. Dakle, imamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & 2b & & & + & 2d & = & 0 \\ -2a & + & 4d & + & c & - & 4d & = & 0 \end{array}$$

odakle je $c = 0$, $a = 2b - 2d$, $b, d \in \mathbb{R}$, pa je $U^{\perp} = \mathcal{L}((2,1,0,0),(-2,0,0,1))$. Nađimo sada u i $u^{\perp}$. Isto kao u prethondom zadatku, v je zbir ortogonalne projekcije i dopune, i može da se zapiše kao

$$v = a(1,-2,0,2) + b(-2,4,1,-4) + c(2,1,0,0) + d(-2,0,0,1),$$

pri čemu je $u = a(1,-2,0,2)+b(-2,4,1,-4)$, a $u^{\perp} = c(2,1,0,0)+d(-2,0,0,1)$. Kada ovaj izraz skalarno pomnožimo sa vektorima baze $U^{\perp}$, dobijamo

$$0 = 5c - 4d$$

$$9 = -4c + 5d$$

Odavde je $c = 4$, $d = 5$, pa je $u^{\perp} = (-2,4,0,5)$, i $u = (3,-6,2,6)$. Udaljenost od v do $U^{\perp}$ je $d(v,u^{\perp}) = ||u|| = \sqrt{85}$, i kosinus ugla između v i $U^{\perp}$ je

$$\cos(\angle(v,U^{\perp})) = \frac{v \circ u^{\perp}}{||v|| \cdot ||u^{\perp}||} = \frac{45}{\sqrt{130} \cdot \sqrt{45}} = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

3. Neka je $U = \mathcal{L}(X^3 - X^2 + 1, -2X^2 + 1, 4X + 5)$. Naći ortogonalnu projekciju i dopunu vektora $v = X^3 + 2X$ na U, kao i udaljenost i ugao između v i U, kao i između v i $U^{\perp}$.