1 Euklidski vektorski prostor

Definicija 1.1. Vektorski prostor V je euklidski vektorski prostor ako je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, i na njemu je definisano preslikavanje $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ takvo da je

1. Za sve $u, v \in V$ važi $u \circ v = v \circ u$.
2. Za sve $u, v, w \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi $(\alpha u + \beta v) \circ w = \alpha u \circ w + \beta v \circ w$ i $u \circ (\alpha)$
3. Za sve $u \in V$ važi $u \circ u \geqslant 0$, i $u \circ u = 0$ ako i samo ako je $u = 0$.

ovakvo preslikavanje zovemo skalarni proizvod.

Primer 1.2. *Neka je $V = \mathbb{R}^n$, i neka je na njemu definisano preslikavanje $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n$. Da li je $\circ$ skalarni proizvod?*

1. $(y_1, \ldots, y_n) \circ (x_1, \ldots, x_n) = y_1x_1 + \ldots y_nx_n = x_1y_1 + \ldots x_ny_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
2. *Proveravamo jednakost* $L = (\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(y_1, \ldots, y_n)) \circ (z_1, \ldots, z_n) = \alpha(x_1, \ldots x_n) \circ (z_1, \ldots, z^n) + \beta(y_1, \ldots, y_n) \circ (z_1, \ldots, z_n) = D$, *koja se proveri prostim računom.*
3. *Imamo da je* $(x_1, \ldots, x_n) \circ (x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, *što je uvek* $\geqslant 0$, *jer ovo je zbir kvadrata realnih brojeva. Taj izraz je jednak nuli ako i samo ako su svi kvadrati jednaki nuli, tj.* $x_1 = \cdots = x_n = 0$. *Dakle,* $(x_1, \ldots, x_n) \circ (x_1, \ldots, x_n) = 0$ *ako i samo ako je* $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$.

Ovakav skalarni proizvod zovemo standardni skalarni proizvod.

1. **a)** Neka je $V = \mathbb{R}^2$, i neka je $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$$

Dokazati da je $\circ$ skalarni proizvod. Da važe svojstva 1. i 2. je pravolinijska provera koja se obavi isto kao u primeru. Treće svojstvo se dokaže tako što uočimo sledeće:

$$(x_1, y_1) \circ (x_1, y_1) = x_1^2 - 2x_1y_1 + 3y_1^2 = (x_1 - y_1)^2 + 2y_1^2.$$

Iz ovakvog izraza vidimo da je $u \circ u \geqslant 0$ za sve $u \in V$, jer je izraz zbir kvadrata realnih brojeva, i vidimo da je izraz jednak nuli ako i samo ako je $x_1 = y_1$ i $y_1 = 0$, tj. $(x_1, y_1) = (0, 0)$.

1. **b)** Neka je sada

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = 4x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2 + \alpha y_1y_2$$

Opet, provera 1. i drugog svojstva je šablonska. Treće svojstvo:

$$(x_1, y_1) \circ (x_1, y_1) = 4x_1^2 - 4x_1y_1 + \alpha y_1^2 = (x_1 - y_1)^2 + (\alpha - 1)y_1^2.$$

Za $\alpha > 1$, dobijeni izraz je uvek $\geqslant 0$, i jednak je nuli ako i samo ako je $x_1 = y_1$ i $y_1 = 0$, tj. $(x_1, y_1) = (0, 0)$.

Za $\alpha = 1$, izraz je i dalje $\geqslant 0$, ali sada je on jednak ako i samo ako je $x_1 = y_1$, tj. za sve vektore oblika (x, x), za $x \in \mathbb{R}$. Dakle, drugi deo trećeg svojstva nije zadovoljen, pa tada ovo nije skalarni proizvod.

Za $\alpha < 1$, izraz je < 0 za, recimo, vektor $(1, 1)$. Tada je vrednost izraza $(1-1)^2 + (\alpha - 1)y_1^2 = \alpha - 1 < 0$, pa ni za ovakvo α ovo nije skalarni proizvod.

1. **c)** Neka je

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = x_1x_2 - 5x_1y_2 - 5y_1x_2 - \alpha y_1y_2$$

2. Neka je $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, i neka je $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$A \circ B = Tr(B^T A),$$

gde je Tr trag matrice, tj. zbir svih koeficijenata na glavnoj dijagonali ($B^T A$ će biti matrica reda $n \times n$, dakle kvadratna, pa je ovo preslikavanje dobro definisano). Dokazati da je $\circ$ skalarni proizvod nad V.

3. **a)** Neka su a, b i c međusobno različiti realni brojevi, $V = \mathbb{R}^3[X]$ i $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$P \circ Q = P(a)Q(a) + P(b)Q(b) + P(c)Q(c).$$

Dokazati da je $\circ$ skalarni proizvod.

3. **b)** Neka su sada $V = \mathbb{R}^3[X]$ i $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$P \circ Q = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + \alpha P''Q''.$$

Kada je $\circ$ skalarni proizvod?

4. Neka je $V = C[a,b]$ skup svih neprekidnih funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $\circ : V \times V \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$u \circ v = \int_a^b u(t)v(t)dt.$$

Dokazati da je $\circ$ skalarni proizvod.

2 Rastojanje i ugao

Definicija 2.1. Za euklidski vektorki prostor V sa skalarnim proizvodom $\circ$, i vektor $u \in V$, norma vektora u je nenegativan realan broj $||u|| := \sqrt{u \circ u}$. Udaljenost između dva vektora definišemo sa $d(u,v) := ||u - v||$.

Uočimo, za $\lambda \in \mathbb{R}$ i $u \in V$, važi $||\lambda u|| = \sqrt{(\lambda u) \circ (\lambda u)} = |\lambda| \cdot ||u||$.

Važi sledeće:

Tvrđenje 2.2 (Koši-Švarc). *U euklidskom v. pr. V, za sve $u, v \in V$ važi*

$$|u \circ v| \leqslant ||u|| \cdot ||v||.$$

Jednakost je ispunjena ako i samo ako su vektori u i v kolinearni.

Tvrđenje 2.3 (Minkovski). *U euklidskom v. pr. V, za sve $u, v \in V$ važi*

$$||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||.$$

Jednakost je ispunjena ako i samo ako su vektori u i v kolinearni.

Imajući u vidu Koši-Švarc nejednakost, vidimo da $\frac{|u \circ v|}{||u|| \cdot ||v||} \in [-1, 1]$, pa je sledeći pojam dobro definisan.

Definicija 2.4. Kosinus ugla između dva nenula vektora u i v je

$$\cos(\angle(u,v)) := \frac{|u \circ v|}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Sam ugao je arccos ove vrednosti. Primetimo, množenje jednog od ovih vektora sa skalarom strogo većim od nule ne menja ugao između njih.

Definicija 2.5. Za dva vektora u i v kažemo da su ortogonalna ili normalna (i pišemo $u \perp v$) ako je ugao između njih $\frac{\pi}{2}$. Ovo se dešava ako i samo ako je $\cos(\angle(u,v)) = 0$, tj. ako i samo ako je $u \circ v = 0$.

1. Neka je $\circ$ skalarni proizvod na vektorskom prostoru $M_{2\times 3}$ definisan sa $A \circ B = Tr(B^T A)$. Naći rastojanje i ugao između matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Udaljenost $d(A,B) = ||A-B|| = \sqrt{(A-B)\circ(A-B)}$. Pošto je $A - B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, i $(A-B)^T(A-B) = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & * & * \\ * & 52 & * \\ * & * & 5 \end{bmatrix}$, to je $d(A,B) = \sqrt{86}$. Što se tiče ugla, imamo da je

$$\cos(\angle(A,B)) = \frac{A \circ B}{||A|| \cdot ||B||} =$$

$$= \frac{Tr\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}{\sqrt{Tr\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}\sqrt{Tr\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right)}} =$$

$$= \frac{-7}{4 \cdot \sqrt{56}}.$$

Dakle, $\angle(A,B) = \arccos(\frac{-7}{8\cdot\sqrt{14}})$.

2. Neka je $\circ$ standardni skalarni proizvod u $V = \mathbb{R}^3$, i neka su $u = (4,-1,-1), v = (1,0,1) \in V$. Naći $d(u,v)$ i $\angle(u,v)$. Zatim naći sve vektore $a \in \mathbb{R}^3$ takve da je $\angle(u,a) = \angle(v,a)$, i sve vektore $b \in V$ takve da je $\angle(u,b) = \frac{\pi}{4}$.

Udaljenost je $||u-v||$, a pošto je $u - v = (3,-1,-2)$, to je $d(u,v) = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$. Kosinus ugla je

$$\frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||} = \frac{4-1}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2},$$

pa je $\angle(u,v) = \frac{\pi}{3}$.
Neka je $a = (x,y,z)$. Tražimo da je $\angle(u,a) = \angle(v,a)$, tj. da je

$$\frac{4x-y-z}{\sqrt{16+1+1}||a||} = \frac{x+z}{\sqrt{2}||a||}.$$

Dakle, imamo da je $4x - y - z = 3x + 3z$, tj. da je $x - y - 4z = 0$, pa je skup svih vektora a koje tražimo upravo $\mathcal{L}((1,1,0),(4,0,1))$. Neka je sada $b = (m,n,k)$. Tražimo da je $\angle(u,b) = \frac{\pi}{4}$, tj.

$$\frac{4m-n-k}{3\sqrt{2}||b||} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Množenje jednog od vektora pozitivnim skalarom se ne menja ugao između njih, pa možemo prvo naći vektore b norme 1, a ostale naći tako što skaliramo tako dobijene vektore. Prema tome, kada je b norme 1, gornja jednakost postaje $4m - n - k = 3$. Imajući sve ovo u vidu, vidimo da je skup svih vektora b koje tražimo upravo $\mathcal{L}((1,0,4),(0,1,-1))$.

3. Naći sve vektore $u \in \mathbb{R}^3$ koji su normalni na $a = (2,1,2)$, i sa vektorom $b = (1,1,)$ zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$.

4. Neka je V euklidski vektorski prostor. Ispitati sledeća tvrđenja:

- Za sve vektore $u, v \in V$ važi da je $||u|| = ||v||$ ako i samo ako je $u - v \perp u + v$.
- Ako je vektor u ortogonalan na svaki vektor $v \in V$ tada je $u = 0$.

- Ako za nenula vektore $u_1, \dots, u_n$ važi da su svi međusobno normalni jedan na drugi (dakle $u_i \perp u_j$ za $i \neq j$), tada je

$$||u_1 + \cdots + u_n||^2 = ||u_1||^2 + \cdots + ||u_n||^2.$$

- Ako su vektori $u_1, \dots, u_n$ međusobno ortogonalni, tada su oni linearni nezavisni.