1 Algebarske operacije i algebraske strukture

Defnicija 1.1 Neka su I i $A \neq \emptyset$ skupovi. *I-familija elemenata skupa A*, ili *familija elemenata iz A indeksirana skupom I*, je funkcija $a : I \to A$ koju radije zapisujemo $a = (a_i)_{i \in I} \in A^I$, gde je $a_i := a(i)$. Ako je $I = \emptyset$, onda je svaka I-familija prazna.

Pojam familije uopštava pojam uređene n-torke (n je prirodan broj) i pojam niza.

Defnicija 1.2 Neka je A neprazan skup i n nenegativan ceo broj.

a) Definišemo *n-ti stepen skupa A*, u oznaci A^n:

$$A^0 := \{\emptyset\} \text{ i}$$

$$A^n := \{(a_1, \dots, a_n) | a_1, \dots, a_n \in A\}, \text{ ako je } n > 0.$$

A^n se formalizuje i kao skup svih funkcija iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ u skup A.

b) *Algebarska operacija skupa A, dužine n*, ili *n-arna operacija skupa A*, je ma koja funkcija $f : A^n \to A$. Za n kažemo da je *arnost* ili *dužina* operacije f, u oznaci $ar(f)$.

Ako je f n-arna operacija i ako su $a_1, \dots, a_n \in A$, onda za sliku $f(a_1, \dots, a_n)$ iz A kažemo i da je rezultat operacije f, primenjene na $(a_1, \dots, a_n)$.

Operacije f dužine 0 su određene slikom $f(\emptyset)$ jedinog elementa $\emptyset$ iz A^0, to jest fiksiranim elementom $a := f(\emptyset)$ iz A. Zato ćemo *nularne* operacije poistovećivati sa izabranim elementima skupa A i tako ih zapisivati. Zapravo, *konstante* iz A su našom definicijom formalno uvedene kao nularne operacije.

Ako je f operacija dužine 1, ili *unarna* operacija, i $a \in A$, rezultat pišemo $f(a)$; ali ne uvek, veoma retko. Neki znaci, na primer $-$, $^{-1}$, $'$, , ^{c}, ^{T}, se često koriste za označavanje unarnih operacija. Tada rezultat primene tih operacija na a pišemo $(-a)$, (a^{-1}), (a'), $\overline{a}$, (a^c), (a^T).

Ako je f operacija dužine 2, ili *binarna* operacija, i $a, b \in A$, rezultat u takozvanom prefiksnom zapisu pišemo $f(a, b)$, ali se takav zapis retko koristi. Neki znaci, na primer $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\vee$, $\wedge$, $\triangle$, pa čak i $\circ$, $*$, se često koriste za označavanje binarnih operacija i rezultat primene tih operacija na $a, b \in A$ se piše u takozvanom infiksnom zapisu. Na primer $(a * b)$.

Defnicija 1.3 *Algebarska struktura*, ili kraće *algebra*, je uređeni par $\mathbb{A} := (A, \Omega)$, gde je A neprazan skup, *domen algebre* $\mathbb{A}$, i Ω neka familija algebarskih operacija skupa A. *Tip*, ili *signatura*, *algebre* $\mathbb{A} = (A, \Omega)$ je Ω-familija $(ar(f))_{f \in \Omega}$.
Kada je $\Omega = (f_i)_{i \in I}$, za neki skup I, onda pišemo i $\mathbb{A} := (A, f_i)_{i \in I}$. Tada je *tip*, ili *signatura*, *algebre* $\mathbb{A}$ I-familija $(ar(f_i))_{i \in I}$.
Algebre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ su *istotipne* ako imaju jednake tipove.

2 Algebarski: jezik, izraz, zakon, teorija

Defnicija 2.1 *Algebarski jezik* L je skup nekih simbola koje nazivamo *simboli algebarskih operacija*, na kome je definisana *funkcija arnosti* $ar : L \to \mathbb{N}_0 : f \mapsto ar(f) \geq 0$, koja svakom simbolu jezika L pridružuje njegovu dužinu (arnost). Tada je $ar(L) := (ar(f))_{f \in L} \in {\mathbb{N}_0}^L$ jedna L-familija u $\mathbb{N}_0$.
Napomena. $L = \coprod_{m \geq 0} L_m$, gde je $L_m := \{f \in L \mid ar(f) = m\}$.
Element f jezika L zovemo simbolom (znakom):

1) konstante, ako je $ar(f) = 0$,

2) unarne operacije, ako je $ar(f) = 1$,

3) binarne operacije, ako je $ar(f) = 2$,

4) ternarne operacije, ako je $ar(f) = 3$.

Defnicija 2.2 Neka je L algebarski jezik, Var skup disjunktan sa L čije elemente nazivamo *promenljivim.* Skup *algebarskih izraza* (ili *terma*) jezika L, nad skupom promenljivih Var, u oznaci $\mathrm{Term}_L(\mathrm{Var})$, ili samo Term_L, definišemo induktivno:

(i) Promenljive i znaci konstanti su termi.

(ii) Ako je $m > 0$, $f \in L_m$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termi, onda je i $f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ term.

(iii) I ništa više. (Termi se dobijaju jedino primenom (i) i (ii).)

Defnicija 2.3 Neka je L algebarski jezik. Skup *algebarskih izraza* (ili *terma*) jezika L, nad skupom promenljivih Var, $L \cap \mathrm{Var} = \emptyset$, u oznaci $T_L(\mathrm{Var})$, ili samo T_L, definišemo induktivno:

(i) $T_0 := \mathrm{Var} \cup L_0$,

(ii) $T_{n+1} := T_n \cup \{f(t_1, \ldots, t_m) \mid m > 0, f \in L_m, t_1, \ldots, t_m \in T_n\}$, $n \geq 0$,

(iii) $T_L := \bigcup\limits_{n \geq 0} T_n$.

$\mathrm{Term}_L = \mathrm{Term}_L(\mathrm{Var})$ i $T_L = T_L(\mathrm{Var})$ su najmanji skupovi koji sadrže promenljive i koji su zatvoreni za sve operacijske znake.

Definicija 2.2 i Definicija 2.3 definišu iste pojmove, $\mathrm{Term}_L = T_L$.

Defnicija 2.4 *Složenost* je funkcija $\mathrm{sl} : T_L \to \mathbb{N}_0$.

Složenost terma $u \in T_L$ je $\mathrm{sl}(u) := \min\{n \geq 0 \mid u \in T_n\}$.

Ako je $u \in T_0$, onda je $\mathrm{sl}(u) = 0$.

Ako $u \notin T_0$ onda je $\mathrm{sl}(u) = n \Leftrightarrow u \in T_n \setminus T_{n-1}$.

Defnicija 2.5 *Algebarski zakon* jezika L, nad skupom promenljivih Var, je jednakost oblika $u = v$, gde su $u, v \in T_L(\mathrm{Var})$.

Defnicija 2.6 *Algebarska teorija* $\mathcal{T}$ je ma koji skup algebarskih zakona, jezika L, nad skupom promenljivih Var.

3 Modeli: jezika , izraza, zakona, teorije

Defnicija 3.1 *Algebarska struktura jezika* L, ili *algebra jezika* L, je uređeni par $\mathbb{A} := (A, (f^{\mathbb{A}})_{f\in L})$, gde je A neprazan skup i $(f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$ neka L-familija algebarskih operacija skupa A koja čuva arnost, to jest takva da je $\mathrm{ar}(f^{\mathbb{A}}) = \mathrm{ar}(f)$ za svaki operacijski znak f jezika L.
Domen algebre $\mathbb{A}$ je skup A.
Tip algebre $\mathbb{A}$ je familija $\mathrm{ar}(L) = (\mathrm{ar}(f))_{f\in L}$.
Algebra $\mathbb{A}$ je *trivijalna* akko $|A| = 1$.

Algebarski jezik L indeksira i operacije i njihove dužine (arnosti).

Algebra $\mathbb{A}$ (tačnije, familija $(f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$) je jedan „model" algebarskog jezika L.

Algebarska operacija $f^{\mathbb{A}}$ je „model" operacijskog znaka $f \in L$, u algebri $\mathbb{A}$.

Defnicija 3.2 Neka je T_L skup terma jezika L, $\mathbb{A} := (A, f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$ je algebra jezika L, i data je funkcija *vrednost promenljivih* $a : \mathrm{Var} \to A$.
Vrednost terma u algebri $\mathbb{A}$ *za datu vrednost promenljivih* $a : \mathrm{Var} \to A$ je funkcija $\vartheta_a^{\mathbb{A}} : T_L \to A$, definisana potpunom indukcijom po sl:

(i) Ako je $x \in \mathrm{Var}$, onda $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(x) := a(x)$.
Ako je $c \in L_0$, onda $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(c) := c^{\mathbb{A}}$.

(ii) Ako je $m > 0$, $f \in L_m$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termi, onda je
$\vartheta_a^{\mathbb{A}}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) := f^{\mathbb{A}}(\vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_1), \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_2), \ldots, \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_m))$.

(ii)' (Detaljniji opis prethodnog koraka.) Ako je $u = f(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in T_{n+1}$, to jest postoje $m > 0$, $f \in L_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T_n$ termi čija vrednost je, po (IH), već definisana, onda je
$\vartheta_a^{\mathbb{A}}(u) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) := f^{\mathbb{A}}(\vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_1), \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_2), \ldots, \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_m)).$

Napomena. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $k \geq 0$, skup promenljivih koje se pojavljuju u termu $t \in T_L(\mathrm{Var})$. Vrednost terma $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ zavisi samo od vrednosti $a_i := a(x_i)$, $1 \leq i \leq k$, ovih promenljivih. Zato ćemo pisati $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(t) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t(x_1, x_2, \ldots, x_k)) =: t^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$, a u ovom zapisu se „vide" i algebra $\mathbb{A}$ i vrednost promenljivih $a : \mathrm{Var} \to A$.

Defnicija 3.3 Neka je $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in T_L(\mathrm{Var})$. Tada:
$t^{\mathbb{A}} : A^k \to A : (a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto t^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] := \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t)$ definiše jednu *term operaciju skupa* A, dužine k.

Term operacija $t^{\mathbb{A}}$ je „model" terma t, u algebri (modelu jezika L) $\mathbb{A}$.

Defnicija 3.4 *Algebarski zakon* $u = v$ *važi u algebri* $\mathbb{A}$, jezika L, akko $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(u) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(v)$, za svaku vrednost promenljivih $a : \mathrm{Var} \to A$. Pišemo $\mathbb{A} \models u = v$, i čitamo: $\mathbb{A}$ *je model algebarskog zakona* $u = v$.

Ako je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, onda $\mathbb{A} \models u = v$ akko $(\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Defnicija 3.5 Algebra $\mathbb{A}$, jezika L, je *model teorije* $\mathcal{T}$ akko svi zakoni iz $\mathcal{T}$ važe u $\mathbb{A}$, to jest akko $\mathbb{A}$ je model svakog zakona iz $\mathcal{T}$. Pišemo $\mathbb{A} \models \mathcal{T}$.

4 Algebarske teorije i varijeteti

Defnicija 4.1 *Algebarski varijetet algebarske teorije* $\mathcal{T}$, u oznaci $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$, je klasa svih modela te teorije, to jest $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) := \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \vDash \mathcal{T}\}$.

Defnicija 4.2 Klasa algebri $\mathfrak{M}$, jezika L, je *algebarski varijetet*, ili *jednakosna klasa*, akko postoji algebarska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$; akko $\mathfrak{M}$ može da se aksiomatizuje algebarskim zakonima (jednakostima).

5 Homomorfizmi

Defnicija 5.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre jezika L. Preslikavanje $h : A \to B$ je *homomorfizam* $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ iz algebre $\mathbb{A}$ u algebru $\mathbb{B}$ akko $(\forall m \geq 0)$ $(\forall f \in L_m)(\forall a_1, \ldots, a_m \in A)\ h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$.

Homomorfizam je preslikavanje „saglasno” sa svim parovima operacija $(f^{\mathbb{A}}, f^{\mathbb{B}})_{f \in L}$. Specijalno, ako je $\mathrm{ar}(*) = 2,\ \mathrm{ar}(\widehat{\ }) = 1,\ \mathrm{ar}(c) = 0,$ i ako su $a, a_1, a_2 \in A,$ onda je $h(a_1 *^{\mathbb{A}} a_2) = h(a_1) *^{\mathbb{B}} h(a_1),\ h(\widehat{a}^{\mathbb{A}}) = \widehat{h(a)}^{\mathbb{B}},\ h(c^{\mathbb{A}}) = c^{\mathbb{B}}$.

Defnicija 5.2 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L.

a) h je *monomorfizam* akko je h injekcija, to jest „$1 - 1$”,

b) h je *epimorfizam* akko je h surjekcija, to jest „na”,

c) h je *izomorfizam* akko je h bijekcija, to jest „$1 - 1$” i „na”,

d) h je *endomorfizam* akko je $A = B$,

e) h je *automorfizam* akko je h izomorfizam i endomorfizam.

Lema 5.1 Neka su $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ algebre istog jezika L. Tada:

a) *Identiteta* na A, $I_A : \mathbb{A} \to \mathbb{A} : a \mapsto a$, je automorfizam algebre $\mathbb{A}$.

b) Ako su $h_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ i $h_2 : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ homomorfizmi algebri istog jezika, onda je i $h_2 \circ h_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ homomorfizam.

c) Ako je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ izomorfizam, onda je $h^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ homomorfizam.

Δ. a) Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in A$. Tada je

$I_A(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = f^{\mathbb{A}}(I_A(a_1), \ldots, I_A(a_m))$.

Onda je I_A homomorfizam, pa i automorfizam.

b) Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in A$. Tada je

$(h_2 \circ h_1)(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = h_2(h_1(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))) =$

$h_2(f^{\mathbb{B}}(h_1(a_1), \ldots, h_1(a_m))) = f^{\mathbb{C}}(h_2(h_1(a_1)), \ldots, h_2(h_1(a_m))) =$

$f^{\mathbb{C}}((h_2 \circ h_1)(a_1), \ldots, (h_2 \circ h_1)(a_m))$.

c) Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $b_1, \ldots, b_m \in B$ onda postoje jedinstveni

$a_1 = h^{-1}(b_1), \ldots, a_m = h^{-1}(b_m) \in A$ tako da je

$h^{-1}(f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m)) = h^{-1}(f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))) =$

$h^{-1}(h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))) = f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) =$

$f^{\mathbb{A}}(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_m))$. $\square$

Posledica. Kompozicija dva monomorfizma (odnosno epimorfizma, izomorfizma, endomorfizma, automorfizma) je monomorfizam (odnosno epimorfizam, izomorfizam, endomorfizam, automorfizam).

Defnicija 5.3 Neka je $\mathbb{A}$ neka algebra.

$$\mathrm{End}(\mathbb{A}) := \{h : A \to A \mid h \text{ je endomorfizam}\},$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) := \{h : A \to A \mid h \text{ je automorfizam}\}.$$

Stav 5.1 Neka je $\mathbb{A}$ algebra. Tada, na osnovu Leme 5.1:

$$\mathcal{E}nd(\mathbb{A}) = (\mathrm{End}(\mathbb{A}), \circ, I_A) \text{ je monoid.}$$

$$\mathcal{A}ut(\mathbb{A}) = (\mathrm{Aut}(\mathbb{A}), \circ, ^{-1}, I_A) \text{ je grupa.}$$

Defnicija 5.4 Algebre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L su *izomorfne*, pišemo $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, akko postoji izomorfizam $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$.

Lema 5.2 *Izomorfnost* je relacija ekvivalencije (na osnovu Leme 5.1).

Stav 5.2 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L. Onda za svaki term $u = u(x_1, \dots, x_k)$ jezika L važi:

$$(\forall a_1, \dots, a_k \in A)\ h(u^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]) = u^{\mathbb{B}}[h(a_1), \dots, h(a_k)].$$

Δ. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po $\mathrm{sl}(u)$.

(i) $\mathrm{sl}(u) = 0$: Ako je $u = c \in L_0$, onda je $h(u^{\mathbb{A}}) = h(c^{\mathbb{A}}) = c^{\mathbb{B}} = u^{\mathbb{B}}$.

Ako je $u = x \in \mathrm{Var}$, onda je $(\forall a \in A)\ h(u^{\mathbb{A}}[a]) = h(a) = u^{\mathbb{B}}[h(a)]$.

(ii) $\mathrm{sl}(u) = n + 1 > 0$: Neka je $u = f(t_1, t_2, \dots, t_m) \in T_{n+1}$, to jest postoje $m > 0$, $f \in L_m$, $t_1, t_2, \dots, t_m \in T_n$ termi za koje, po (IH), Lema već važi.

$u = u(x_1, \dots, x_k) = f(t_1(x_1, \dots, x_k), t_2(x_1, \dots, x_k), \dots, t_m(x_1, \dots, x_k))$.

Neka su $a_1, \dots, a_k \in A$ proizvoljni. Tada:

$h(u^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]) = h(f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k], t_2^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k], \dots, t_m^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]))$

$= f^{\mathbb{B}}(h(t_1^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]), h(t_2^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]), \dots, h(t_m^{\mathbb{A}}[a_1, \dots, a_k]))$, jer je h homo,

$= f^{\mathbb{B}}(t_1^{\mathbb{B}}[ha_1, \dots, ha_k], t_2^{\mathbb{B}}[ha_1, \dots, ha_k], \dots, t_m^{\mathbb{B}}[ha_1, \dots, ha_k])$, na osnovu (IH),

$= u^{\mathbb{B}}[h(a_1), \dots, h(a_k)]$ $\square$

Stav 5.3 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ epimomorfizam algebri jezika L, i $u = v$ algebarski zakon jezika L. Tada, ako $\mathbb{A} \vDash u = v$ onda $\mathbb{B} \vDash u = v$.

Δ. Neka je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kako $\mathbb{A} \vDash u = v$, imamo da je $(\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.
Ako su $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B = h[A]$, onda postoje $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ tako da je $b_1 = h(a_1), b_2 = h(a_2), \ldots, b_k = h(a_k)$. Tada imamo
$u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k] = u^{\mathbb{B}}[h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)] = h(u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]) =$
$h(v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]) = v^{\mathbb{B}}[h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)] = v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]$. $\Box$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ epimorfizam. Ako je $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$.

Δ. Postoji algebraska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Kako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, to je $\mathbb{A} \vDash \mathcal{T}$. Onda je $\mathbb{B} \vDash \mathcal{T}$, to jest $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$. $\Box$

6 Podalgebre

Defnicija 6.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre jezika L.
Algebra $\mathbb{B}$ je *podalgebra algebre* $\mathbb{A}$, pišemo $\mathbb{B} < \mathbb{A}$, akko:
1° $B \subseteq A$,
2° $(\forall m \geq 0)\ (\forall f \in L_m)(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)\ f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$.

Defnicija 6.2 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L.
$B \subseteq A$ je *podalgebra algebre* $\mathbb{A}$ akko:
1° $B \neq \emptyset$,
2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, onda $(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)\ f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m) \in B$.

Tada (do)definišemo algebru $\mathbb{B}$ čiji je domen skup B, tako da je
$(\forall m \geq 0)\ (\forall f \in L_m)(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)\ f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) := f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$.

Napomena. Prethodne dve definicije su ekvivalentne.

Stav 6.1 Ako je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L, onda je $h[A]$ podalgebra algebre $\mathbb{B}$, u smislu Definicije 6.2 , pa je $h[\mathbb{A}]$ algebra.

Δ. 1° $A \neq \emptyset \;\Rightarrow h[A] \neq \emptyset$,

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $b_1, \ldots, b_m \in h[A]$ onda postoje $a_1, \ldots, a_m \in A$ tako da je $f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) = h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) \in h[A]$. $\square$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $h[\mathbb{A}] \in \mathfrak{M}$.

Δ. Jer je $h[\mathbb{A}]$ algebra (Stav 6.1), i h indukuje epimorfizam $h^{\twoheadrightarrow} : \mathbb{A} \to h[\mathbb{A}]$. $\square$

Lema 6.1 $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ su algebre jezika L. $\mathbb{B}$ je podalgebra algebre $\mathbb{A}$ akko:

1° $B \subseteq A$,

2° $\mu : B \to A : b \mapsto b$ je monomorfizam (*prirodno utapanje*).

Δ. $\Rightarrow$: $\mu(f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m)) = f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\mathbb{A}}(\mu b_1, \ldots, \mu b_m)$.
$\Leftarrow$: $f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = \mu(f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m)) = f^{\mathbb{A}}(\mu b_1, \ldots, \mu b_m) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$. $\square$

Stav 6.2 Neka je $\mathbb{B}$ podalgebra algebre $\mathbb{A}$, jezika L, i $u = v$ ma koji algebarski zakon jezika L. Ako $\mathbb{A} \models u = v$ onda $\mathbb{B} \models u = v$.

Δ. Neka je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kako $\mathbb{A} \models u = v$, imamo da je $(\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)$ $u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.
Neka su $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B \subseteq A$ proizvoljni. Tada je
$u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k] = \mu(u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]) = u^{\mathbb{A}}[\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_k] =$
$v^{\mathbb{A}}[\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_k] = \mu(v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]) = v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]$. $\square$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i $\mathbb{B}$ podalgebra algebre $\mathbb{A}$. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$.

7 Direktni proizvod

Defnicija 7.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n$ algebre jezika L. Algebra $\mathbb{A}$ je *direktni proizvod familije* $(\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n)$, u oznaci[1] $\mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$, akko:

1° $A := \prod_{i=1}^{n} A_i := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\} \leftrightarrow$
$\left\{ a : \{1, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid (\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ a(i) \in A_i \right\}.$

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in A$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, onda je
$(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))(i) := f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_m(i)) \in A_i$.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}} = (c^{\mathbb{A}_1}, \ldots, c^{\mathbb{A}_n}) \in A$.

Ako $\widehat{\ } \in L_1$, $* \in L_2$, i ako su $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in A$, onda
$\widehat{a}^{\mathbb{A}} = (\widehat{a_1}^{\mathbb{A}_1}, \ldots, \widehat{a_n}^{\mathbb{A}_n})$, $\quad a *^{\mathbb{A}} b = (a_1 *^{\mathbb{A}_1} b_1, \ldots, a_n *^{\mathbb{A}_n} b_n)$.

Defnicija 7.2 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_i$, $i \in I$, algebre jezika L. Algebra $\mathbb{A}$ je *direktni proizvod familije algebri* $(\mathbb{A}_i)_{i \in I}$, , u oznaci $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$, akko:

1° $A := \prod_{i \in I} A_i := \left\{ a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I)\ a(i) \in A_i \right\}$[2].

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \ldots, a_m \in A$ proizvoljni, onda je
$(\forall i \in I)\ (f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))(i) := f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_m(i)) \in A_i$.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i} \in A_i$, $c^{\mathbb{A}} = (c^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} \in A$.

Ako $\widehat{\ } \in L_1$, $* \in L_2$, i ako su $a, b \in A$, onda (uz $a_i := a(i), b_i := b(i)$)
$\widehat{a}^{\mathbb{A}} = (\widehat{a(i)}^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} = (\widehat{a_i}^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} \in A$,
$a *^{\mathbb{A}} b = (a(i) *^{\mathbb{A}_i} b(i))_{i \in I} = (a_i *^{\mathbb{A}_i} b_i)_{i \in I} \in A$.

Napomena. *Stepeni algebre* $\mathbb{A}$ su $\mathbb{A}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}$, $\quad \mathbb{A}^I := \prod_{i \in I} \mathbb{A}$.

---

[1] Ili $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \times \cdots \times \mathbb{A}_n$, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$.

[2] (AI) Aksioma izbora: Ako je $(A_i)_{i \in I}$ familija nepraznih skupova, onda je $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

Defnicija 7.3 Neka je $(A_i)_{i\in I}$ familija nepraznih skupova i $A=\prod\limits_{i\in I} A_i$. Tada se funkcija $\pi_i : A \to A_i : a \mapsto a(i)$ naziva *$i-$ta projekcija.*

Stav 7.1 Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L i $\mathbb{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathbb{A}_i$. Za svako $j\in I$, $\pi_j : A \to A_j$ je epimorfizam $\pi_j : \prod\limits_{i\in I}\mathbb{A}_i \to \mathbb{A}_j$.

Δ. Prvo proveravamo da je π_j homomorfizam, a onda da je „epi".

Ako je $m\geq 0$, $f\in L_m$, i $a_1,\ldots,a_m\in A$ proizvoljni, onda je

$$\begin{aligned}\pi_j(f^{\mathbb{A}}(a_1,\ldots,a_m)) &= (f^{\mathbb{A}}(a_1,\ldots,a_m))(j) = f^{\mathbb{A}_j}(a_1(j),\ldots,a_m(j))\\ &= f^{\mathbb{A}_j}(\pi_j(a_1),\ldots,\pi_j(a_m)).\end{aligned}$$

Neka je $\alpha\in A_j$ fiksiran, i neka je $a\in A$ ma koji element($A\neq\emptyset$). Od $a\in A$ i $\alpha\in A_j$ pravimo $b\in A$ tako da je $b(i) := \begin{cases}\alpha, & i=j;\\ a(i), & i\neq j.\end{cases}$ Tada je $\pi_j(b)=\alpha$.

$\square$

Stav 7.2 Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L, $\mathbb{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathbb{A}_i$, i $u=v$ algebarski zakon jezika L. Tada, $\mathbb{A}\vDash u=v$ akko $(\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i\vDash u=v$.

Δ. $\Rightarrow$: $\mathbb{A}\vDash u=v \ \Rightarrow\ (\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i=\pi_i[\mathbb{A}]\vDash u=v$, prema Stavu 5.3.

$\Leftarrow$: $\lceil\ (\forall a,b\in A)\ (a=b \ \Leftrightarrow (\forall i\in I)\ \pi_i(a)=\pi_i(b)).\ \rfloor$ $(\circledast)$

Neka je $u=u(x_1,\ldots,x_k)$, $v=v(x_1,\ldots,x_k)$, i neka $a_1,\ldots,a_k\in A$.

Kako $(\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i\vDash u=v$, to je $(\forall i\in I)\ (\forall\ a_1,\ldots,a_k\in A)$

$$u^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)] = v^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]. \quad (\boxtimes)$$

Sada je $(\forall\ a_1,\ldots,a_k\in A)\ (\forall i\in I)\ \pi_i(u^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k])$

$$\begin{aligned}&= u^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]) = v^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]) \quad \text{(zbog } (\boxtimes))\\ &= \pi_i(v^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]).\ \text{Odavde sledi, koristeći } (\circledast),\end{aligned}$$

$(\forall\ a_1,\ldots,a_k\in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k])$, to jest $\mathbb{A}\vDash u=v$. $\square$

Posledica Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L, $\mathbb{A} = \prod\limits_{i\in I}\mathbb{A}_i$, i $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet jezika L. Tada, $\mathbb{A}\in\mathfrak{M}$ akko $(\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i\in\mathfrak{M}$.

Δ. Postoji algebraska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Onda: $\mathbb{A}\in\mathfrak{M}$ akko $\mathbb{A}\models\mathcal{T}$ akko $(\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i\models\mathcal{T}$ akko $(\forall i\in I)\ \mathbb{A}_i\in\mathfrak{M}$. $\square$

Primer. Klasa svih polja nije algebarski varijetet (jednakosna klasa), jer je direktni proizvod dva polja ima prave delitelje nule.

Δ. $(0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{K}})\cdot(1_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{K}}) = (0_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{F}\times\mathbb{K}}$. $\square$

8 Kongruencije i količničke algebre

Defnicija 8.1 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L i $\sim\,\subseteq A^2$ binarna relacija skupa A. Tada je $\sim$ *kongruencija algebre* $\mathbb{A}$ akko:

1° $\sim$ je relacija ekvivalencije (R, S, T),

2° Ako je $m>0$, $f\in L_m$, onda za svako $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_m\in A$:
$a_1\sim b_1\wedge\dots\wedge a_m\sim b_m \Rightarrow f^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_m)\sim f^{\mathbb{A}}(b_1,\dots,b_m)$.

Lema 8.1 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $\sim\,\subseteq A^2$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$. Ako je $m>0$, $f\in L_m$, onda za svako $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_m\in A$ važi

$$a_{1/\sim} = b_{1/\sim}\wedge\dots\wedge a_{m/\sim} = b_{m/\sim} \Rightarrow (f^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_m))_{/\sim} = (f^{\mathbb{A}}(b_1,\dots,b_m))_{/\sim}.$$

Δ. $a_{1/\sim} = b_{1/\sim}\wedge\dots\wedge a_{m/\sim} = b_{m/\sim} \Rightarrow a_1\sim b_1\wedge\dots\wedge a_m\sim b_m \Rightarrow f^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_m)\sim f^{\mathbb{A}}(b_1,\dots,b_m) \Rightarrow (f^{\mathbb{A}}(a_1,\dots,a_m))_{/\sim} = (f^{\mathbb{A}}(b_1,\dots,b_m))_{/\sim}$. $\square$

Defnicija 8.2 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L i $\sim$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$. Definišemo *količničku (faktor) algebru* $\mathbb{A}_{/\sim} := (A_{/\sim}, f^{\mathbb{A}_{/\sim}})_{f\in L}$:

1° $A_{/\sim} := \big\{a_{/\sim} \mid a \in A\big\}$, gde je $a_{/\sim} := \{b \in A \mid a \sim b\}$.

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \ldots, a_m \in A$ proizvoljni, onda je $f^{\mathbb{A}_{/\sim}}(a_{1/\sim}, \ldots, a_{m/\sim}) := (f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))_{/\sim}$.

Operacije su *dobro definisane*, na osnovu Leme 8.1.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}_{/\sim}} := (c^{\mathbb{A}})_{/\sim}$. Ako $\widehat{\ } \in L_1$, $* \in L_2$, i ako su $a, b \in A$, onda $\widehat{a_{/\sim}}^{\mathbb{A}_{/\sim}} = (\widehat{a}^{\mathbb{A}})_{/\sim}$, $a_{/\sim} *^{\mathbb{A}_{/\sim}} b_{/\sim} = (a *^{\mathbb{A}} b)_{/\sim}$.

Lema 8.2 Ako je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $\sim$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$, i $\pi : A \to A_{/\sim} : a \mapsto a_{/\sim}$, onda je π epimorfizam, takozvana *kanonska (prirodna) projekcija* $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_{/\sim}$ algebre $\mathbb{A}$, na faktor algebru $\mathbb{A}_{/\sim}$.

Δ. Sledi iz prethodne definicije, kad je „čitamo zdesna": $\pi(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))$ $= (f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))_{/\sim} = f^{\mathbb{A}_{/\sim}}(a_{1/\sim}, \ldots, a_{m/\sim}) = f^{\mathbb{A}_{/\sim}}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m))$. $\square$

Defnicija 8.3 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L. Definišemo *jezgro homomorfizma h, binarnu realciju,*

$\sim_h \subseteq A^2$: $(\forall a_1, a_2 \in A)$ $(a_1 \sim_h a_2 \;\Leftrightarrow\; h(a_1) = h(a_2))$,

ili skupovno $\mathrm{Ker}(h) := \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid h(a_1) = h(a_2)\}$.

Lema 8.3 Jezgro homomorfizma $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ je kongruencija algebre $\mathbb{A}$.

Δ. Iz definicije sledi da je jezgro, kao jednakost slika, relacija ekvivalencije. Ako je $m > 0$, $f \in L_m$, onda za svako $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in A$:

$a_1 \sim_h b_1 \wedge \cdots \wedge a_m \sim_h b_m \;\Rightarrow\; h(a_1) = h(b_1), \ldots, h(a_m) = h(b_m) \;\Rightarrow$
$h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) = f^{\mathbb{B}}(h(b_1), \ldots, h(b_m))$
$= h(f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)) \;\Rightarrow\; f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) \sim_h f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$ $\square$

Teorema o razlaganju homomorfizma. Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam, $\sim$ je $\sim_h$, to jest jezgro $\mathrm{Ker}(h)$. Neka je $\mu : h[\mathbb{A}] \to \mathbb{B} : b \mapsto b$ prirodno utapanje (monomorfizam) i $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_{/\sim} : a \mapsto a_{/\sim}$ prirodna projekcija (epimorfizam). Tada postoji tačno jedan izomorfizam $\varphi : \mathbb{A}_{/\sim} \to h[\mathbb{A}]$, tako da je $h = \mu \circ \varphi \circ \pi$.

Δ. Definišemo $\varphi : A_{/\sim} \to h[A] : a_{/\sim} \mapsto \varphi(a_{/\sim}) := h(a)$.

0° φ je dobro definisano:

$a_{/\sim} = b_{/\sim} \;\Rightarrow\; a \sim b \;\Rightarrow\; h(a) = h(b)$.

1° φ je „$1-1$":

$\varphi(a_{/\sim}) = \varphi(b_{/\sim}) \;\Rightarrow\; h(a) = h(b) \;\Rightarrow\; a \sim b \;\Rightarrow\; a_{/\sim} = b_{/\sim}$.

2° φ je „na": $h[A] \ni h(a) = \varphi(a_{/\sim})$.

3° φ je homomorfizam:

Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \ldots, a_m \in A$ proizvoljni. Onda je

$\varphi(f^{\mathbb{A}/\sim}(a_{1/\sim}, \ldots, a_{m/\sim})) = \varphi((f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))_{/\sim})$

$= h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) = f^{h[\mathbb{A}]}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$

$= f^{h[\mathbb{A}]}(\varphi(a_{1/\sim}), \ldots, \varphi(a_{m/\sim}))$.

4° $h = \mu \circ \varphi \circ \pi$ sledi iz definicije:

$(\forall a \in A)\; \varphi(a_{/\sim}) = h(a) \;\Rightarrow\; (\forall a \in A)\; \varphi(\pi(a)) = h(a)$

$\Rightarrow\; (\forall a \in A)\; \mu(\varphi(\pi(a))) = h(a) \;\Rightarrow\; \mu \circ \varphi \circ \pi = h$

5° φ je jedinstveno: $\mu \circ \varphi \circ \pi = h \;\Rightarrow\; (\forall a \in A)\; \mu(\varphi(\pi(a))) = h(a)$

$\Rightarrow\; (\forall a \in A)\; \varphi(\pi(a)) = h(a) \;\Rightarrow\; (\forall a \in A)\; \varphi(a_{/\sim}) = h(a)$. $\square$