1 Algebarske operacije i algebraske strukture

Defnicija 1.1 Neka su I i $A \neq \emptyset$ skupovi. *I-familija elemenata skupa A*, ili *familija elemenata iz A indeksirana skupom I*, je funkcija $a : I \to A$ koju radije zapisujemo $a = (a_i)_{i \in I} \in A^I$, gde je $a_i := a(i)$.
Ako je $I = \emptyset$, onda je svaka I-familija prazna; $A^\emptyset = \{\emptyset\}$.
Pojam familije uopštava pojam uređene n-torke (n je prirodan broj) i pojam niza.

Defnicija 1.2 Neka je A neprazan skup i n nenegativan ceo broj.

a) Definišemo *n-ti stepen skupa A*, u oznaci A^n:

$$A^0 := \{\emptyset\} \text{ i}$$

$$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}, \text{ ako je } n > 0.$$

A^n se formalizuje i kao skup svih funkcija iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u skup A.

b) *Algebarska operacija skupa A, dužine n*, ili *n-arna operacija skupa A*, je ma koja funkcija $f : A^n \to A$.
Za n kažemo da je *arnost* ili *dužina* operacije f, u oznaci $\mathrm{ar}(f)$.

Ako je f n-arna operacija i ako su $a_1, \ldots, a_n \in A$, onda je $f(a_1, \ldots, a_n)$ rezultat operacije f, primenjene na $(a_1, \ldots, a_n)$.

Operacija f dužine 0 je određena slikom $f(\emptyset)$ jedinog elementa $\emptyset$ iz A^0. Zato *nularnu* operaciju f poistovećujemo sa konstantom $a := f(\emptyset) \in A$. *Konstante* iz A su našom definicijom uvedene kao nularne operacije.

Ako je f operacija dužine 1, ili *unarna* operacija, i $a \in A$, rezultat pišemo $f(a)$; ali ne uvek. Neki znaci, na primer $-$, ${}^{-1}$, ${}'$, ${}^{-}$, ^{c}, ^{T}, se često koriste za označavanje unarnih operacija. Tada rezultat primene tih operacija na a pišemo $(-a)$, (a^{-1}), $((-a)')$, $(\overline{a}^c)$, $(-(a^c))$, $(\overline{a^c})^{-1}$.

Ako je f operacija dužine 2, ili *binarna* operacija, i $(a, b) \in A^2$, rezultat u takozvanom prefiksnom zapisu pišemo $f(a, b)$, ali se takav zapis retko koristi. Neki znaci, na primer $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $\vee$, $\wedge$, $\triangle$, $\circ$, $*$, se često koriste za označavanje binarnih operacija i rezultat primene tih operacija na $(a, b) \in A^2$ se piše u takozvanom infiksnom zapisu. Na primer $(a * b)$.

Defnicija 1.3 *Algebarska struktura*, ili kraće *algebra*, je uređeni par $\mathbb{A} := (A, \Omega)$, gde je A neprazan skup, *domen algebre* $\mathbb{A}$, i Ω neka familija algebarskih operacija skupa A.

Tip, ili *signatura*, *algebre* $\mathbb{A} = (A, \Omega)$ je Ω-familija $(\mathrm{ar}(f))_{f \in \Omega}$.

Algebre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ su *istotipne* ako imaju jednake tipove.

Kada je $\Omega = (f_1, \ \ldots, f_j)$, onda pišemo i $\mathbb{A} := (A, f_1, \ \ldots, f_j)$. Tada je $(\mathrm{ar}(f_1), \ \ldots, \mathrm{ar}(f_j))$, gdeje $\mathrm{ar}(f_1) \geq \cdots \geq \mathrm{ar}(f_j)$, tip algebre $\mathbb{A}$.

Kada je $\Omega = (f_i)_{i \in I}$, za neki skup I, onda pišemo i $\mathbb{A} := (A, f_i)_{i \in I}$. Tada je tip, ili signatura, algebre $\mathbb{A}$ I-familija $(\mathrm{ar}(f_i))_{i \in I}$.

2 Algebarski: jezik, izraz, zakon, teorija

Defnicija 2.1 *Algebarski jezik* L je skup nekih simbola koje nazivamo *simboli algebarskih operacija*, na kome je definisana *funkcija arnosti* $\mathrm{ar} : L \to \mathbb{N}_0 : f \mapsto \mathrm{ar}(f) \geq 0$, koja svakom simbolu jezika L pridružuje njegovu dužinu (arnost).

Signatura, ili *tip*, *jezika* L je L-familija $\mathrm{ar}(L) := (\mathrm{ar}(f))_{f \in L} \in {\mathbb{N}_0}^L$.

NAPOMENA. $L = \coprod_{m \geq 0} L_m$, gde je $L_m := \{f \in L \mid \mathrm{ar}(f) = m\}$.

Element f jezika L zovemo simbolom (znakom):

1) konstante, ako je $\mathrm{ar}(f) = 0$,
2) unarne operacije, ako je $\mathrm{ar}(f) = 1$,
3) binarne operacije, ako je $\mathrm{ar}(f) = 2$,
4) ternarne operacije, ako je $\mathrm{ar}(f) = 3$.

Defnicija 2.2 Neka je $\mathcal{V}ar := \{x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$, i neka je Var neki podskup skupa $\mathcal{V}ar$. Elementi skupa Var su *promenljive*. Iako podrazumevamo da je Var prebrojiv, to nije uvek neophodno.

Defnicija 2.3 Neka je L algebarski jezik. Skup *algebarskih izraza* (ili *terma*) jezika L, nad skupom promenljivih Var, $L \cap \mathrm{Var} = \emptyset$, u oznaci $\mathrm{Term}_L(\mathrm{Var})$, ili samo Term_L, definišemo induktivno:

(i) Promenljive i znaci konstanti su termi.

(ii) Ako je $m > 0$, $f \in L_m$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termi, onda je i $f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ term.

(iii) I ništa više. (Termi se dobijaju jedino primenom (i) i (ii).)

Defnicija 2.4 Neka je L algebarski jezik. Skup *algebarskih izraza* (ili *terma*) jezika L, nad skupom promenljivih Var, $L \cap \mathrm{Var} = \emptyset$, u oznaci $T_L(\mathrm{Var})$, ili samo T_L, definišemo induktivno:

(i) $T_0 := \mathrm{Var} \cup L_0$,

(ii) $T_{n+1} := T_n \cup \{f(t_1, \ldots, t_m) \mid m > 0, f \in L_m, t_1, \ldots, t_m \in T_n\}$, $n \geq 0$,

(iii) $T_L := \bigcup\limits_{n \geq 0} T_n$.

Stav 2.5 Term_L i T_L su najmanji skupovi koji sadrže promenljive i koji su zatvoreni za sve operacijske znake.
Definicija 2.3 i Definicija 2.4 definišu iste pojmove, $\mathrm{Term}_L = T_L$.

Defnicija 2.6 *Složenost* je funkcija $\mathrm{sl} : T_L \to \mathbb{N}_0$.
Složenost terma $u \in T_L$ je $\mathrm{sl}(u) := \min \{n \geq 0 \mid u \in T_n\}$.
Ako je $u \in T_0$, onda je $\mathrm{sl}(u) = 0$.
Ako $u \notin T_0$ onda je $\mathrm{sl}(u) = n \Leftrightarrow u \in T_n \setminus T_{n-1}$.

Defnicija 2.7 *Algebarski zakon* jezika L je formula (*jednakost*) oblika $u = v$, gde su $u, v \in T_L$.

Defnicija 2.8 *Algebarska teorija* $\mathcal{T}$, jezika L, je skup nekih algebarskih zakona jezika L, za koje kažemo da su *aksiome teorije* $\mathcal{T}$.

3 Modeli: jezika , izraza, zakona, teorije

Defnicija 3.1 *Algebarska struktura jezika* L, ili *algebra jezika* L, je uređeni par $\mathbb{A} := (A, (f^{\mathbb{A}})_{f\in L})$, gde je A neprazan skup i $(f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$ neka L-familija algebarskih operacija skupa A koja čuva arnost, to jest takva da je $\mathrm{ar}(f^{\mathbb{A}}) = \mathrm{ar}(f)$ za svaki operacijski znak f jezika L.
Domen algebre $\mathbb{A}$ je skup A.
Tip algebre $\mathbb{A}$ je familija $\mathrm{ar}(L) = (\mathrm{ar}(f))_{f\in L}$.
Algebra $\mathbb{A}$ je *trivijalna* akko $|A| = 1$.

Algebarski jezik L indeksira i operacije i njihove dužine (arnosti).
Algebra $\mathbb{A}$ (tačnije, familija $(f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$) je jedan „model” algebarskog jezika L.
Algebarska operacija $f^{\mathbb{A}}$ je „model” operacijskog znaka $f \in L$, u algebri $\mathbb{A}$.

Defnicija 3.2 Neka je T_L skup terma jezika L, $\mathbb{A} := (A, f^{\mathbb{A}})_{f\in L}$ je algebra jezika L, i data je funkcija *vrednost promenljivih* $a : \mathrm{Var} \to A$. *Vrednost terma u algebri* $\mathbb{A}$ *za datu vrednost promenljivih* $a : \mathrm{Var} \to A$ je funkcija $\vartheta_a^{\mathbb{A}} : T_L \to A$, definisana potpunom indukcijom po sl:

(i) Ako je $x \in \mathrm{Var}$, onda $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(x) := a(x)$.
Ako je $c \in L_0$, onda $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(c) := c^{\mathbb{A}}$.

(ii) Ako je $m > 0$, $f \in L_m$ i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termi, onda je
$\vartheta_a^{\mathbb{A}}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) := f^{\mathbb{A}}(\vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_1), \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_2), \ldots, \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_m))$.

(ii)' (Detaljniji opis prethodnog koraka.) Ako je $u = f(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in T_{n+1} \setminus T_n$, to jest postoji $m > 0$, $f \in L_m$, $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T_n$ termi čija vrednost je, po (IH), već definisana, onda je
$\vartheta_a^{\mathbb{A}}(u) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) := f^{\mathbb{A}}(\vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_1), \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_2), \ldots, \vartheta_a^{\mathbb{A}}(t_m))$.

Napomena. Možemo pretpostaviti da je, do na preznačavanje, skup promenljivih koje se pojavljuju u termu $u \in T_L(\mathrm{Var})$ sadržan u skupu $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, za neko $k \geq 0$. Tada pišemo $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Vrednost terma u zavisi samo od vrednosti $a_i := a(x_i)$, $1 \leq i \leq k$. Zato uvodimo $u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] := \vartheta_a^{\mathbb{A}}(u(x_1, x_2, \ldots, x_k)) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(u)$, a u ovom zapisu se „vide” i algebra $\mathbb{A}$ i vrednosti promenljivih.

Defnicija 3.3 Neka je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in T_L(\mathrm{Var})$. Tada:
$$u^{\mathbb{A}} : A^k \to A : (a_1, a_2, \ldots, a_k) \mapsto u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$$
definiše jednu *term operaciju skupa A*, dužine k.

Term operacija $u^{\mathbb{A}}$ je „model” terma $u = u(x_1, \ldots, x_k)$, u algebri $\mathbb{A}$.

Defnicija 3.4 *Algebarski zakon $u = v$ važi u algebri* $\mathbb{A}$, jezika L, akko $\vartheta_a^{\mathbb{A}}(u) = \vartheta_a^{\mathbb{A}}(v)$, za svaku vrednost promenljivih $a : \mathrm{Var} \to A$. Pišemo $\mathbb{A} \vDash u = v$, i čitamo: $\mathbb{A}$ *je model algebarskog zakona* $u = v$.

Ako je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, onda $\mathbb{A} \vDash u = v$ akko $(\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Defnicija 3.5 Algebra $\mathbb{A}$, jezika L, je *model teorije* $\mathcal{T}$ akko svi zakoni iz $\mathcal{T}$ važe u $\mathbb{A}$, to jest akko $\mathbb{A}$ je model svakog zakona iz $\mathcal{T}$. Pišemo $\mathbb{A} \vDash \mathcal{T}$.

4 Algebarske teorije i varijeteti

Defnicija 4.1 *Algebarski varijetet algebarske teorije* $\mathcal{T}$*, u oznaci* $\mathfrak{M}(\mathcal{T})$, je klasa svih modela te teorije, to jest $\mathfrak{M}(\mathcal{T}) := \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \vDash \mathcal{T}\}$.

Defnicija 4.2 Klasa algebri $\mathfrak{M}$, jezika L, je *algebarski varijetet* akko postoji algebarska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$; akko $\mathfrak{M}$ može da se aksiomatizuje algebarskim zakonima.

5 Homomorfizmi

Defnicija 5.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre jezika L. Preslikavanje $h : A \to B$ je *homomorfizam* $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ iz algebre $\mathbb{A}$ u algebru $\mathbb{B}$ akko $(\forall m \geq 0)$ $(\forall f \in L_m)(\forall a_1, \ldots, a_m \in A)\ h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))$.

Homomorfizam je preslikavanje „saglasno” sa svim parovima operacija $(f^{\mathbb{A}}, f^{\mathbb{B}})_{f \in L}$. Specijalno, ako je $\mathrm{ar}(*) = 2,\ \mathrm{ar}(\widehat{\ }) = 1,\ \mathrm{ar}(c) = 0,$ i ako su $a, a_1, a_2 \in A,$ onda je $h(a_1 *^{\mathbb{A}} a_2) = h(a_1) *^{\mathbb{B}} h(a_2),\ h(\widehat{a}^{\mathbb{A}}) = \widehat{h(a)}^{\mathbb{B}},\ h(c^{\mathbb{A}}) = c^{\mathbb{B}}.$

Defnicija 5.2 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L.

a) h je *monomorfizam* akko je h injekcija, to jest „$1-1$”,

b) h je *epimorfizam* akko je h surjekcija, to jest „na”,

c) h je *izomorfizam* akko je h bijekcija, to jest „$1-1$” i „na”,

d) h je *endomorfizam* akko je $A = B$,

e) h je *automorfizam* akko je h izomorfizam i endomorfizam.

Lema 5.3 Neka su $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ algebre istog jezika L. Tada:

a) *Identiteta* na A, $I_A : \mathbb{A} \to \mathbb{A} : a \mapsto a$, je automorfizam algebre $\mathbb{A}$.

b) Ako su $h_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ i $h_2 : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ homomorfizmi, onda je i njihova kompozicija $h_2 \circ h_1 : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ homomorfizam.

c) Ako je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ izomorfizam, onda je $h^{-1} : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ homomorfizam.

Δ. a) Dokazujemo da je I_A homomorfizam, dakle i automorfizam.

Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in A$. Tada je

$$\begin{aligned} I_A(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) &= f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) \\ &= f^{\mathbb{A}}(I_A(a_1), \ldots, I_A(a_m)). \end{aligned}$$

b) Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in A$. Tada je

$$\begin{aligned} (h_2 \circ h_1)(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) &= h_2(h_1(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))) \\ &= h_2(f^{\mathbb{B}}(h_1(a_1), \ldots, h_1(a_m))) \\ &= f^{\mathbb{C}}(h_2(h_1(a_1)), \ldots, h_2(h_1(a_m))) \\ &= f^{\mathbb{C}}((h_2 \circ h_1)(a_1), \ldots, (h_2 \circ h_1)(a_m)). \end{aligned}$$

c) Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $b_1, \ldots, b_m \in B$, onda postoje jedinstveni

$a_1 = h^{-1}(b_1), \ \ldots, \ a_m = h^{-1}(b_m) \in A$ tako da je

$$\begin{aligned} h^{-1}(f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m)) &= h^{-1}(f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m))) \\ &= h^{-1}(h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))) \\ &= f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) \\ &= f^{\mathbb{A}}(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_m)). \ \Box \end{aligned}$$

Posledica. Kompozicija dva monomorfizma (odnosno epimorfizma, izomorfizma, endomorfizma, automorfizma) je monomorfizam (odnosno epimorfizam, izomorfizam, endomorfizam, automorfizam).

Defnicija 5.4 Neka je $\mathbb{A}$ neka algebra.

$$\mathrm{End}(\mathbb{A}) := \{h : A \to A \mid h \text{ je endomorfizam}\},$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) := \{h : A \to A \mid h \text{ je automorfizam}\}.$$

Stav 5.5 Neka je $\mathbb{A}$ algebra. Tada, na osnovu Leme 5.3:

$$\mathcal{E}nd(\mathbb{A}) := (\mathrm{End}(\mathbb{A}), \circ, I_A) \text{ je monoid.}$$

$$\mathcal{A}ut(\mathbb{A}) := (\mathrm{Aut}(\mathbb{A}), \circ, {}^{-1}, I_A) \text{ je grupa.}$$

Defnicija 5.6 Algebre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jezika L su *izomorfne*, pišemo $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, akko postoji izomorfizam $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$.

Lema 5.7 *Izomorfnost* je relacija ekvivalencije (na osnovu Leme 5.3).

Stav 5.8 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L. Onda za svaki term $u = u(x_1, \ldots, x_k)$ jezika L važi:

$$(\forall a_1, \ldots, a_k \in A)\ h\left(u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k]\right) = u^{\mathbb{B}}[h(a_1), \ldots, h(a_k)].$$

Δ. Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po $\mathrm{sl}(u)$.

(i) $\mathrm{sl}(u) = 0$:

Ako je $u = c \in L_0$, onda je $h(u^{\mathbb{A}}) = h(c^{\mathbb{A}}) = c^{\mathbb{B}} = u^{\mathbb{B}}$.

Ako je $u = x \in \mathrm{Var}$, onda je $(\forall a \in A)\ h\left(u^{\mathbb{A}}[a]\right) = h(a) = u^{\mathbb{B}}[h(a)]$.

(ii) $\mathrm{sl}(u) = n + 1 > 0$: Neka je $u = u(x_1, \ldots, x_k) \in T_{n+1} \setminus T_n$. Tada postoji $m > 0,\ f \in L_m,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m \in T_n$ tako da je $u = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Po (IH), Stav već važi za $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T_n$.

$u = u(x_1, \ldots, x_k) = f(t_1(x_1, \ldots, x_k), t_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_k))$.

Neka su $a_1, \ldots, a_k \in A$ proizvoljni. Tada:

$$
\begin{aligned}
h\left(u^{\mathbb{A}}[a_1,\ \ldots,\ a_k]\right) &= h\left(f^{\mathbb{A}}\left(t_1^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k],\ \ldots,\ t_m^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]\right)\right) \\
&= f^{\mathbb{B}}\left(h\left(t_1^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]\right),\ \ldots,\ h\left(t_m^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]\right)\right) \\
&= f^{\mathbb{B}}\left(t_1^{\mathbb{B}}[ha_1,\ldots,ha_k],\ \ldots,\ t_m^{\mathbb{B}}[ha_1,\ldots,ha_k]\right) \\
&= u^{\mathbb{B}}[h(a_1),\ \ldots,\ h(a_k)].\ \square
\end{aligned}
$$

Stav 5.9 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ epimomorfizam algebri jezika L i $u = v$ algebarski zakon jezika L. Ako $\mathbb{A} \models u = v$, onda $\mathbb{B} \models u = v$.

Δ. Neka je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kako $\mathbb{A} \models u = v$, imamo da je $(\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Ako su $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k \in B = h[A]$, onda postoje $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k \in A$ tako da je $b_1 = h(a_1),\ b_2 = h(a_2),\ \ldots,\ b_k = h(a_k)$. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k] &= u^{\mathbb{B}}[h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)] \\
&= h(u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]) \\
&= h(v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]) \\
&= v^{\mathbb{B}}[h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_k)] \\
&= v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k].\ \square
\end{aligned}
$$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ epimorfizam. Ako je $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$.

Δ. Postoji algebraska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Kako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, to je $\mathbb{A} \models \mathcal{T}$. Onda je $\mathbb{B} \models \mathcal{T}$, to jest $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$. $\square$

6 Podalgebre

Defnicija 6.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre jezika L.

Algebra $\mathbb{B}$ je *podalgebra algebre* $\mathbb{A}$, pišemo $\mathbb{B} < \mathbb{A}$, akko:

1° $B \subseteq A$,

2° $(\forall m \geq 0)$ $(\forall f \in L_m)(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)$ $f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$.

Defnicija 6.2 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L.

$B \subseteq A$ je *podalgebra algebre* $\mathbb{A}$ akko:

1° $B \neq \emptyset$,

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, onda $(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)$ $f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m) \in B$.

Tada (do)definišemo algebru $\mathbb{B}$ čiji je domen skup B, tako da je

$(\forall m \geq 0)$ $(\forall f \in L_m)(\forall b_1, \ldots, b_m \in B)$ $f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) := f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$.

NAPOMENA. Prethodne dve definicije su ekvivalentne.

Stav 6.3 Ako je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L, onda je $h[A]$ podalgebra algebre $\mathbb{B}$, u smislu Definicije 6.2, i $h[\mathbb{A}] < \mathbb{B}$ je algebra.

Δ. 1° $A \neq \emptyset \Rightarrow h[A] \neq \emptyset$,

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $b_1, \ldots, b_m \in h[A]$ onda postoje $a_1, \ldots, a_m \in A$ tako da je

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_m) &= f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) \\ &= h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) \in h[A]. \quad \square \end{aligned}$$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $h[\mathbb{A}] \in \mathfrak{M}$.

Δ. Homomorfizam h indukuje epimorfizam $h^{\twoheadrightarrow} : \mathbb{A} \to h[\mathbb{A}] : a \mapsto h(a)$. Tvrđenje sledi na osnovu Posledice Stava 5.9. $\square$

Stav 6.4 $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ su algebre jezika L. $\mathbb{B}$ je podalgebra algebre $\mathbb{A}$ akko:

1° $B \subseteq A$,

2° $\mu : B \to A : b \mapsto b$ je monomorfizam (*prirodno utapanje*).

$$\begin{aligned}\Delta.\ \Rightarrow: \mu(f^{\mathbb{B}}(b_1,\ldots,b_m)) &= f^{\mathbb{B}}(b_1,\ldots,b_m)\\ &= f^{\mathbb{A}}(b_1,\ldots,b_m) = f^{\mathbb{A}}(\mu b_1,\ldots,\mu b_m).\\ \Leftarrow: f^{\mathbb{B}}(b_1,\ldots,b_m) &= \mu(f^{\mathbb{B}}(b_1,\ldots,b_m))\\ &= f^{\mathbb{A}}(\mu b_1,\ldots,\mu b_m) = f^{\mathbb{A}}(b_1,\ldots,b_m).\ \square\end{aligned}$$

Stav 6.5 Neka je $\mathbb{B}$ podalgebra algebre $\mathbb{A}$, jezika L, i $u = v$ ma koji algebarski zakon jezika L. Ako $\mathbb{A} \vDash u = v$, onda $\mathbb{B} \vDash u = v$.

Δ. Neka je $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ i $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Kako $\mathbb{A} \vDash u = v$, imamo da je $(\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Neka su $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B \subseteq A$ proizvoljni. Tada je

$u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k] = \mu(u^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]) = u^{\mathbb{A}}[\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_k]$

$= v^{\mathbb{A}}[\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_k] = \mu(v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]) = v^{\mathbb{B}}[b_1, b_2, \ldots, b_k]$. $\square$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet i $\mathbb{B}$ podalgebra algebre $\mathbb{A}$. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$.

Stav 6.6 Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija podalgebri algebre $\mathbb{A}$, jezika L. Ako je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, onda je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ podalgebra algebre $\mathbb{A}$; pišemo $\bigcap\limits_{i\in I} \mathbb{A}_i < \mathbb{A}$.

Δ. Primenom definicije preseka i Definicije 6.2. $\square$

Posledica. Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet, $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ je familija podalgebri algebre $\mathbb{A}$ takva da je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$, onda $\bigcap\limits_{i\in I} \mathbb{A}_i \in \mathfrak{M}$.

7 Direktni proizvod

Defnicija 7.1 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ algebre jezika L. Algebra $\mathbb{A}$ je *direktni proizvod familije* $(\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n)$, u oznaci[1] $\mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$, akko:

1° $A := \prod_{i=1}^{n} A_i := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \leftrightarrow$
$\left\{a : \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\})\ a(i) \in A_i\right\}$.

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \dots, a_m \in A$, $i \in \{1, \dots, n\}$, onda je
$(f^{\mathbb{A}}(a_1,\ \dots,\ a_m))(i) := f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\ \dots,\ a_m(i)) \in A_i$.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}} = (c^{\mathbb{A}_1}, \dots, c^{\mathbb{A}_n}) \in A$.

Ako $\widehat{\ } \in L_1,\ * \in L_2$, i ako su $a = (a_1, \dots, a_n),\ b = (b_1, \dots, b_n) \in A$, onda

$\widehat{a}^{\mathbb{A}} = (\widehat{a_1}^{\mathbb{A}_1}, \dots, \widehat{a_n}^{\mathbb{A}_n}),\quad a *^{\mathbb{A}} b = (a_1 *^{\mathbb{A}_1} b_1, \dots, a_n *^{\mathbb{A}_n} b_n)$.

Defnicija 7.2 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{A}_i$, $i \in I$, algebre jezika L. Algebra $\mathbb{A}$ je *direktni proizvod familije algebri* $(\mathbb{A}_i)_{i \in I}$, , u oznaci $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$, akko:

1° $A := \prod_{i \in I} A_i := \left\{a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I)\ a(i) \in A_i\right\}$[2].

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \dots, a_m \in A$ proizvoljni, onda je
$(\forall i \in I)\ (f^{\mathbb{A}}(a_1,\ \dots,\ a_m))(i) := f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\ \dots,\ a_m(i)) \in A_i$.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i} \in A_i,\ c^{\mathbb{A}} = (c^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} \in A$.

Ako $\widehat{\ } \in L_1,\ * \in L_2$, i ako su $a,\ b \in A,$ onda (uz $a_i := a(i), b_i := b(i)$)

$\widehat{a}^{\mathbb{A}} = (\widehat{a(i)}^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} = (\widehat{a_i}^{\mathbb{A}_i})_{i \in I} \in A$,

$a *^{\mathbb{A}} b = (a(i) *^{\mathbb{A}_i} b(i))_{i \in I} = (a_i *^{\mathbb{A}_i} b_i)_{i \in I} \in A$.

Napomena. *Stepeni algebre* $\mathbb{A}$ su $\mathbb{A}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{A},\quad \mathbb{A}^I := \prod_{i \in I} \mathbb{A}$.

[1] Ili $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \times \cdots \times \mathbb{A}_n,\ A = A_1 \times \cdots \times A_n$.

[2] (AI) Aksioma izbora: Ako je $(A_i)_{i \in I}$ familija nepraznih skupova, onda je $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Defnicija 7.3 Neka je $(A_i)_{i\in I}$ familija nepraznih skupova i $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$. Tada se funkcija $\pi_i : A \to A_i : a \mapsto a(i)$ naziva *$i-$ta projekcija.*

Stav 7.4 Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L i neka je $\mathbb{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathbb{A}_i$. Za svako $i \in I$, $\pi_i : A \to A_i$ je epimorfizam $\pi_i : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_i$.

Δ. Prvo proveravamo da je π_i homomorfizam, a onda da je „epi".

Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \ldots, a_m \in A$ proizvoljni, onda je

$$\begin{aligned}\pi_i(f^{\mathbb{A}}(a_1,\ldots,a_m)) &= (f^{\mathbb{A}}(a_1,\ldots,a_m))(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i),\ldots,a_m(i)) \\ &= f^{\mathbb{A}_i}(\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_m)).\end{aligned}$$

Neka je $\alpha \in A_i$ fiksiran, i $a \in A = \prod\limits_{\iota\in I} A_\iota$ ma koji.

Od $a \in A$ i $\alpha \in A_i$ pravimo $b \in A$ tako da je $b(\iota) := \begin{cases} \alpha, & \iota = i; \\ a(\iota), & \iota \neq i. \end{cases}$

Tada je $\pi_i(b) = b(i) = \alpha$. $\square$

Stav 7.5 Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L, $\mathbb{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathbb{A}_i$, i $u = v$ je zakon jezika L. Tada: $\mathbb{A} \vDash u = v$ akko $(\forall i \in I)\ \mathbb{A}_i \vDash u = v$.

Δ. $\Rightarrow$: $\mathbb{A} \vDash u = v \ \Rightarrow\ $ Za sve $i \in I$, $\mathbb{A}_i = \pi_i[\mathbb{A}] \vDash u = v$, prema Stavu 5.9.

$\Leftarrow$: $\lceil\ (\forall a, b \in A)\ (a = b \ \Leftrightarrow (\forall i \in I)\ \pi_i(a) = \pi_i(b)).\ \rfloor$ $(\circledast)$

Neka je $u = u(x_1,\ldots,x_k)$, $v = v(x_1,\ldots,x_k)$, i neka $a_1,\ldots,a_k \in A$.

Kako, za sve $i \in I$, $\mathbb{A}_i \vDash u = v$, to je $(\forall i \in I)$ $(\forall\ a_1,\ldots,a_k \in A)$

$$u^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)] = v^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]. \quad (\boxtimes)$$

Sada je $(\forall\ a_1,\ldots,a_k \in A)$ $(\forall i \in I)$

$$\begin{aligned}\pi_i(u^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]) &= u^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]) \\ &= v^{\mathbb{A}_i}[\pi_i(a_1),\ldots,\pi_i(a_k)]) \quad (\text{zbog } (\boxtimes)) \\ &= \pi_i(v^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k]).\end{aligned}$$

Odavde, primenom $(\circledast)$, dobijamo:

$(\forall\ a_1,\ldots,a_k \in A)\ u^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k] = v^{\mathbb{A}}[a_1,\ldots,a_k])$, to jest $\mathbb{A} \vDash u = v$. $\square$

Posledica Neka je $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri jezika L, $\mathbb{A} = \prod_{i\in I} \mathbb{A}_i$, i $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet jezika L. Tada, $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$ akko $(\forall i \in I)\ \mathbb{A}_i \in \mathfrak{M}$.

Δ. Postoji algebraska teorija $\mathcal{T}$, jezika L, tako da je $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{T})$. Onda: $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$ akko $\mathbb{A} \models \mathcal{T}$ akko $(\forall i \in I)\ \mathbb{A}_i \models \mathcal{T}$ akko $(\forall i \in I)\ \mathbb{A}_i \in \mathfrak{M}$. $\square$

Primer. Klasa svih polja nije algebarski varijetet (jednakosna klasa), zato što direktni proizvod dva polja ima prave delitelje nule.

Δ. $\mathbb{F}$ i $\mathbb{K}$ su polja. $(0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{K}}) \cdot (1_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{K}}) = (0_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{K}}) = 0_{\mathbb{F}\times\mathbb{K}}$. $\square$

8 Kongruencije i količničke algebre

Defnicija 8.1 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L i $\sim\ \subseteq A^2$ binarna relacija skupa A. Tada je $\sim$ *kongruencija algebre* $\mathbb{A}$ akko:

1° $\sim$ je relacija ekvivalencije (R, S, T),

2° Ako je $m > 0$, $f \in L_m$, onda za svako $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m \in A$:
$a_1 \sim b_1 \wedge \cdots \wedge a_m \sim b_m \ \Rightarrow\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) \sim f^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_m)$.

Defnicija 8.2 Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam algebri jezika L. Definišemo *jezgro homomorfizma* h, kao binarnu realciju

$\sim_h\ \subseteq A^2$: $\quad (\forall a_1, a_2 \in A)\ (a_1 \sim_h a_2 \ \Leftrightarrow\ h(a_1) = h(a_2))$,

ili skupovno $\quad \mathrm{Ker}(h) := \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid h(a_1) = h(a_2)\}$.

Stav 8.3 Jezgro homomorfizma $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ je kongruencija algebre $\mathbb{A}$.

Δ. Iz definicije sledi da je jezgro, kao jednakost slika, relacija ekvivalencije.

Ako je $m > 0$, $f \in L_m$, onda za svako $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in A$:

$$\begin{aligned}
a_1 \sim_h b_1 \wedge \dots \wedge a_m \sim_h b_m \quad &\Rightarrow \quad h(a_1) = h(b_1), \dots, h(a_m) = h(b_m) \\
\Rightarrow\ h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m)) \ &= \ f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m)) \\
&= \ f^{\mathbb{B}}(h(b_1), \dots, h(b_m)) \ = \ h(f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_m)) \\
\Rightarrow\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) \ &\sim_h \ f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_m). \ \square
\end{aligned}$$

Lema 8.4 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $\sim \subseteq A^2$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$. Ako je $m > 0$, $f \in L_m$, onda za svako $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in A$ važi

$$a_{1/\sim} = b_{1/\sim} \wedge \dots \wedge a_{m/\sim} = b_{m/\sim} \quad \Rightarrow \quad (f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m))_{/\sim} = (f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_m))_{/\sim}.$$

Δ. $a_{1/\sim} = b_{1/\sim} \wedge \dots \wedge a_{m/\sim} = b_{m/\sim} \ \Rightarrow \ a_1 \sim b_1 \wedge \dots \wedge a_m \sim b_m \ \Rightarrow$ $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m) \sim f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_m) \ \Rightarrow \ (f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m))_{/\sim} = (f^{\mathbb{A}}(b_1, \dots, b_m))_{/\sim}$. $\square$

Defnicija 8.5 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L i $\sim$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$. Definišemo *količničku (faktor) algebru* $\mathbb{A}_{/\sim} := (A_{/\sim}, f^{\mathbb{A}/\sim})_{f \in L}$:

1° $A_{/\sim} := \{a_{/\sim} \mid a \in A\}$, gde je $a_{/\sim} := \{b \in A \mid a \sim b\}$.

2° Ako je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \dots, a_m \in A$ proizvoljni, onda je $f^{\mathbb{A}/\sim}(a_{1/\sim}, \dots, a_{m/\sim}) := (f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m))_{/\sim}$.

Operacije su *dobro definisane*, na osnovu Leme 8.4.

Specijalno, ako je $c \in L_0$, onda je $c^{\mathbb{A}/\sim} := (c^{\mathbb{A}})_{/\sim}$. Ako $\widehat{\ } \in L_1$, $* \in L_2$, i ako su $a, b \in A$, onda $\widehat{a_{/\sim}}^{\mathbb{A}/\sim} = (\widehat{a}^{\mathbb{A}})_{/\sim}$, $a_{/\sim} *^{\mathbb{A}/\sim} b_{/\sim} = (a *^{\mathbb{A}} b)_{/\sim}$.

Stav 8.6 Ako je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $\sim$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$, i $\pi : A \to A_{/\sim} : a \mapsto a_{/\sim}$, onda je π epimorfizam, takozvana *kanonska (prirodna) projekcija* $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_{/\sim}$ algebre $\mathbb{A}$, na faktor algebru $\mathbb{A}_{/\sim}$.

Δ. Sledi iz prethodne definicije, kad je „čitamo zdesna”: $\pi(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m))$ $= (f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_m))_{/\sim} = f^{\mathbb{A}/\sim}(a_{1/\sim}, \dots, a_{m/\sim}) = f^{\mathbb{A}/\sim}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_m))$. $\square$

Teorema o razlaganju homomorfizma. Neka je $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizam, $\sim$ je $\sim_h$, to jest jezgro $\mathrm{Ker}(h)$. Neka je $\mu : h[\mathbb{A}] \to \mathbb{B} : b \mapsto b$ prirodno utapanje (monomorfizam) i $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}_{/\sim} : a \mapsto a_{/\sim}$ prirodna projekcija (epimorfizam). Tada postoji tačno jedan izomorfizam $\varphi : \mathbb{A}_{/\sim} \to h[\mathbb{A}]$, tako da je $h = \mu \circ \varphi \circ \pi$.

Δ. Definišemo

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & A_{/\sim} \to h[A], \\ & a_{/\sim} \mapsto \varphi(a_{/\sim}) := h(a). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\mu} \\ A_{/\sim} & \xrightarrow{\varphi} & h[A] \end{array}$$

0° φ je dobro definisano:

$$a_{/\sim} = b_{/\sim} \;\Rightarrow\; a \sim b \;\Rightarrow\; h(a) = h(b).$$

1° φ je „$1-1$”:

$$\varphi(a_{/\sim}) = \varphi(b_{/\sim}) \;\Rightarrow\; h(a) = h(b) \;\Rightarrow\; a \sim b \;\Rightarrow\; a_{/\sim} = b_{/\sim}.$$

2° φ je „na”: $h[A] \ni h(a) = \varphi(a_{/\sim})$.

3° φ je homomorfizam:

Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, i $a_1, \ldots, a_m \in A$ proizvoljni. Onda je

$$\begin{aligned} \varphi(f^{\mathbb{A}_{/\sim}}(a_{1/\sim}, \ldots, a_{m/\sim})) &= \varphi((f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m))_{/\sim}) \\ = h(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m)) &= f^{\mathbb{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) \\ = f^{h[\mathbb{A}]}(h(a_1), \ldots, h(a_m)) &= f^{h[\mathbb{A}]}(\varphi(a_{1/\sim}), \ldots, \varphi(a_{m/\sim})). \end{aligned}$$

4° $h = \mu \circ \varphi \circ \pi$ sledi iz definicije:

$$\begin{aligned} (\forall a \in A)\ \varphi(a_{/\sim}) = h(a) &\Rightarrow (\forall a \in A)\ \varphi(\pi(a)) = h(a) \\ &\Rightarrow (\forall a \in A)\ \mu(\varphi(\pi(a))) = h(a) \\ &\Rightarrow \mu \circ \varphi \circ \pi = h \end{aligned}$$

5° φ je jedinstveno:

$$\begin{aligned} \mu \circ \varphi \circ \pi = h &\Rightarrow (\forall a \in A)\ \mu(\varphi(\pi(a))) = h(a) \\ &\Rightarrow (\forall a \in A)\ \varphi(\pi(a)) = h(a) \\ &\Rightarrow (\forall a \in A)\ \varphi(a_{/\sim}) = h(a). \quad \Box \end{aligned}$$

Posledica (Stava 8.6) Neka je $\mathfrak{M}$ algebarski varijetet, $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $\sim$ kongruencija algebre $\mathbb{A}$. Ako $\mathbb{A} \in \mathfrak{M}$ onda $\mathbb{A}_{/\sim} \in \mathfrak{M}$.

9 Generatori

Defnicija 9.1 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $X \subseteq A$ takav da $X \cup L_0 \neq \emptyset$. *Podalgebra algebre* $\mathbb{A}$ *generisana skupom* X, u oznaci $\langle X \rangle$ ili $\langle X \rangle_{\mathbb{A}}$, je najmanja podalgebra algebre $\mathbb{A}$ koja sadrži skup X.

Stav 9.2 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $X \subseteq A$, $X \cup L_0 \neq \emptyset$. Tada je $\langle X \rangle = \bigcap\limits_{X \subseteq B < \mathbb{A}} \mathbb{B} < \mathbb{A}$. (Neprazan presek podalgebri je podalgebra, Stav 6.6).

Defnicija 9.3 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $X \subseteq A$, $X \cup L_0 \neq \emptyset$; $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor := \{u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k] \mid u(x_1, \ldots, x_k) \in T_L, a_1, \ldots, a_k \in X, k \in \mathbb{N}_0\}$, gde je Var beskonačan.

Stav 9.4 Ako je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $X \subseteq A$, $X \cup L_0 \neq \emptyset$, i Var je beskonačan, onda je $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor = \langle X \rangle$.

Δ. Dokazujemo:

1° $X \subseteq \lceil\lfloor X \rceil\rfloor$: Neka $\alpha \in X$. Tada

$$(\exists u = u(x) = x \in \mathrm{Var} \subseteq T_L)\ \alpha = u^{\mathbb{A}}[\alpha] \in \lceil\lfloor X \rceil\rfloor.$$

2° $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor \neq \emptyset$: $X \neq \emptyset \Rightarrow \lceil\lfloor X \rceil\rfloor \neq \emptyset$,

$$L_0 \neq \emptyset \Rightarrow (\exists c \in L_0)\ c^{\mathbb{A}} \in \lceil\lfloor X \rceil\rfloor \Rightarrow \lceil\lfloor X \rceil\rfloor \neq \emptyset.$$

3° $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor < \mathbb{A}$:

Neka je $m \geq 0$, $f \in L_m$, $a_1, \ldots, a_m \in \lceil\lfloor X \rceil\rfloor$ proizvoljni. Tada, po definiciji $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor$, postoje termi $t_1, \ldots, t_m \in T_L$ tako da:

$$\text{za neke } a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1} \in X \quad a_1 = t_1^{\mathbb{A}}[a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}],$$

$$\ldots, \text{ za neke } a_{m,1}, \ldots, a_{m,k_m} \in X \quad a_m = t_m^{\mathbb{A}}[a_{m,1}, \ldots, a_{m,k_m}].$$

Sada, postoje $x_{1,1}, \ldots, x_{1,k_1}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,k_m} \in \mathrm{Var}$, uzajamno različiti,

i postoji $u \in T_L$, $u = u(x_{1,1}, \ldots, x_{1,k_1}, \ldots, x_{m,1}, \ldots, x_{m,k_m})$,

tako da je, uz preznačavanje promenljivih u termima $t_1, \ldots, t_m \in T_L$,

$$u := f(t_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,k_1}), \ldots, t_m(x_{m,1}, \ldots, x_{m,k_m})).$$

Tada je $f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_m) = u^{\mathbb{A}}[a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}, \ldots, a_{m,1}, \ldots, a_{m,k_m}] \in \lceil\lfloor X \rceil\rfloor$.

4° $X \subseteq B < \mathbb{A} \;\Rightarrow\; \lceil\lfloor X \rceil\rfloor < \mathbb{B}$:

Neka je $\mu : B \to A : b \mapsto b$ utapanje, $u = u(x_1, \ldots, x_k) \in T_L$,

$a_1, \ldots, a_k \in X \subseteq B$, i $u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k] \in \lceil\lfloor X \rceil\rfloor$. Tada:

$$u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k] = u^{\mathbb{A}}[\mu a_1, \ldots, \mu a_k]$$
$$= \mu\left(u^{\mathbb{B}}[a_1, \ldots, a_k]\right) = u^{\mathbb{B}}[a_1, \ldots, a_k] \in B.$$

Iz $1^\circ - 3^\circ$ sledi $\langle X \rangle < \lceil\lfloor X \rceil\rfloor$, a iz 4° sledi $\lceil\lfloor X \rceil\rfloor < \langle X \rangle$. $\square$

Defnicija 9.5 Neka je $\mathbb{A}$ algebra jezika L, $X \subseteq A$, $X \cup L_0 \neq \emptyset$. Skup X *generiše* algebru $\mathbb{A}$ akko $\mathbb{A} = \langle X \rangle_{\mathbb{A}}$, to jest akko $\mathbb{A} = \langle X \rangle$.

Tada, za beskonačan Var, imamo:

$\mathbb{A} = \{u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k] \mid u = u(x_1, \ldots, x_k) \in T_L,\ a_1, \ldots, a_k \in X,\ k \in \mathbb{N}_0\}$.

Stav 9.6 Neka su $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ algebre jezika L, $X \subseteq A$, $X \cup L_0 \neq \emptyset$, $\mathbb{A} = \langle X \rangle_{\mathbb{A}}$. Ako su $f, g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfizmi, onda

$$f|_X = g|_X \;\Rightarrow\; f = g.$$

Δ. Neka je $a \in A$ proizvoljan.

$(\exists k \geq 0)\ (\exists u = u(x_1, \ldots, x_k) \in T_L)\ (\exists a_1, \ldots, a_k \in X)\ a = u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k]$.

$$\text{Tada je } f(a) = f(u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k]) = u^{\mathbb{B}}[fa_1, \ldots, fa_k]$$
$$= u^{\mathbb{B}}[ga_1, \ldots, ga_k] = g(u^{\mathbb{A}}[a_1, \ldots, a_k]) = g(a). \quad \square$$