Животно осигурање

Формуле

Марија Цупарић

Математички факултет, Београд

2017/2018.

Садржај

1. Финансијска математика
2. Модел преостале дужине живота
3. Врсте животног осигурања
4. Осигурање личне ренте
5. Нето премије
6. Нето резерве премија

Камаћење

i ефективна каматна стопа

$i^{(m)}$ годишња номинална каматна стопа, m број периода током године

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

непрекидно камаћење

$$1 + i = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}$$

$$\delta = \lim_{m \to \infty} i^{(m)}$$

Дисконтни фактори

$v = \frac{1}{1+i}$ дисконтни фактор за једну годину

$v = \frac{1}{1+\frac{i^{(m)}}{m}}$ дисконтни фактор за један период када се камаћење врши $m-$пута годишње

$v = e^{-\delta}$ дисконтни фактор непрекидног камаћења

будућа вредност	садашња вредност
$FV = \sum_{k=0}^{n} x_k(1+i)^{n-k}$	$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{n} x_k v^k$
$FV = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n-k}$	$PV = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^k} = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(v^{(m)}\right)^k$
$FV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{r(t_n-t_k)}$	$PV = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} e^{-rt_k} = \sum_{k=0}^{n} x_{t_k} v^{t_k}$

Доживотна рента

$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \cdots = \frac{1}{1-\upsilon} = \frac{1}{d}$ садашња вредност доживотне ренте плативе унапред

$a_{\overline{\infty}|} = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots = \frac{\upsilon}{1-\upsilon} = \frac{1}{i}$ садашња вредност доживотне ренте плативе накнадно

$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{2}{m}} + \cdots = \frac{1}{m(1-\upsilon^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{d^{(m)}}$ садашња вредност доживотне ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку 0

$a^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}\upsilon^{\frac{2}{m}} + \cdots = \frac{\upsilon^{\frac{1}{m}}}{m(1-\upsilon^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{i^{(m)}}$ садашња вредност доживотне ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку $\frac{1}{m}$

$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{q}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}(1 + \upsilon^{\frac{1}{q}} + \upsilon^{\frac{2}{q}} + \cdots) = \frac{1}{d^{(m)}q^{(m)}}$ садашња вредност доживотне ренте са m растућих уплата током године плативе унапред

$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \upsilon^{\frac{1}{m}}(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i^{(m)}d^{(q)}}$ садашња вредност доживотне ренте са m растућих уплата током године плативе накнадно

Ренте (анутитети)

$\ddot{a}_{\overline{K}|} = 1 + \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^{K-1} = \frac{1-\upsilon^K}{d}$ садашња вредност ренте са К годишњих исплата и почетком у садашњем тренутку

$a_{\overline{K}|} = \frac{1-\upsilon^K}{i}$ садашња вредност ренте са К годишњих исплата и почетком након годину дана

$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K}|} = \frac{1-\upsilon^K}{d^{(m)}}$ садашња вредност ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку 0

$a^{(m)}_{\overline{K}|} = \frac{1-\upsilon^K}{i^{(m)}}$ садашња вредност ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку 0

$(I^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K}|} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{K}|} - K\upsilon^K}{d^{(m)}}$ садашња вредност ренте са m растућих уплата током године и почетком у садашњем тренутку

$(I^{(q)}a)^{(m)}_{\overline{K}|} = \frac{\ddot{a}^{(q)}_{\overline{K}|} - K\upsilon^K}{i^{(m)}}$ садашња вредност ренте са m растућих уплата током године и почетком након годину дана

$(D^{(q)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{K}|} = \frac{K - a_{\overline{K}|}}{d^{(m)}}$ садашња вредност ренте са m опадајућих уплата током године и почетком у садашњем тренутку

Акумулирана вредност ренте

- $\ddot{s}_{\overline{K}|} = \frac{(1+i)^K - 1}{d}$
- $s_{\overline{K}|} = \frac{(1+i)^K - 1}{i}$
- $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{(1+i)^K - 1}{d^{(m)}}$
- $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \frac{(1+i)^K - 1}{i^{(m)}}$

Садржај

1 Финансијска математика

2 Модел преостале дужине живота

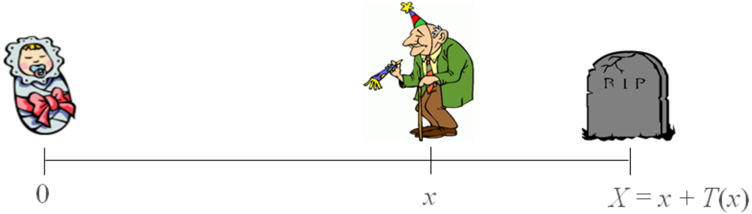
3 Врсте животног осигурања

4 Осигурање личне ренте

5 Нето премије

6 Нето резерве премија

Модел преостале дужине живота



Модел преостале дужине живота

$_{t}q_x = P\{T \leq t\} = G(t), t \geq 0$

вероватноћа да ће особа која има x година умрети за највише t година, где је t фиксирано

$_{t}p_x = P\{T > t\} = 1 - G(t), t \geq 0$

вероватноћа да ће особа живети бар још t година (вероватноћа доживљења)

$_{s|t}q_x = P\{s < T < s + t\} = {}_{s+t}q_x - {}_{s}q_x$

вероватноћа да ће особа која има x година преживети s година и умрети пре него што прође још t година

Модел преостале дужине живота

(1) $$ {}_tp_{x+s} = P\{T > s+t | T > s\} = \frac{1-G(s+t)}{1-G(s)}, $$

(2) $$ {}_tq_{x+s} = P\{T \leq s+t | T > s\} = \frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)}, $$

(3) $$ {}_{s+t}p_x = 1-G(s+t) = [1-G(s)]\frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} = {}_sp_x\,{}_tp_{x+s}, $$

(4)
$$ {}_{s|t}q_x = G(s+t)-G(s) = [1-G(s)]\frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} = {}_sp_x\,{}_tq_{x+s}. $$

Модел преостале дужине живота

$$\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} (1 - G(t))dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt$$

очекивано преостало време живота особе која има x године у садашњем тренутку

$$\mu_{x+t} = \frac{f(t)}{\bar{G}(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(\bar{G}(t)) = -\frac{d}{dt}\ln({}_t p_x)$$

интензитета смртности у тренутку $x + t$ особе која има x година у садашњем тренутку

$${}_t p_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s} ds)$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{+\infty} t\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Целобројна преостале дужине живота

$P\{K=k\}=P\{[T]=k\}={}_k p_x q_{x+k}, k=0,1,\ldots$

број завршених будућих година живота особе која у садашњем тренутку има x година

$$e_x=\sum_{k=1}^{+\infty} kP\{K=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,{}_k p_x q_{x+k}=\sum_{k=1}^{+\infty} P\{K\geq k\}=\sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x$$

очекивани број завршених будућих година живота

$S\in[0,1)$, *тако да важи* $T=K+S$

фракција (преостали део) године током које је особа, која у почетном тренутку има x година, жива у години смрти

$$\mathring{e}_x \approx e_x+\frac{1}{2}$$

Одређивање вероватноће смртности:

- аналитички изрази за фукцију расподеле:

- таблице смртности

Одређивање вероватноће смртности:

- аналитички изрази за фукцију расподеле:

  Де Моавреов закон $\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t < \omega - x$, где је ω максималан број година за људска бића и $T \in U(0, \omega - x)$

  Гомперцов закон $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0$

  Мејкхемов закон $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0$

  Вејбулов закон $\mu_{x+t} = k(x+t)^n$, $k > 0$ и $n > 0$

  Мејкхемов II закон $\mu_{x+t} = A + H(x+t) + Bc^{x+t}, t > 0$
- таблице смртности

Одређивање вероватноће смртности:

- аналитички изрази за фукцију расподеле:

  Де Моавреов закон $\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega-x-t}, 0 < t < \omega - x$, где је ω максималан број година за људска бића и $T \in U(0, \omega - x)$

  Гомперцов закон $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0$

  Мејкхемов закон $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0$

  Вејбулов закон $\mu_{x+t} = k(x+t)^n$, $k > 0$ и $n > 0$

  Мејкхемов II закон $\mu_{x+t} = A + H(x+t) + Bc^{x+t}, t > 0$

- таблице смртности
  - показују вероватноћу да особа одређених година умре пре њеног или његовог следећег рођендана

  $\nearrow$ периодичне

  $\searrow$ кохорт

Таблице смртности

- l_x
- $d_x = l_x - l_{x+1}$
- $D_x = v^x l_x$
- $N_x = D_x + D_{x+1} + \dots$
- $C_x = v^{x+1} d_x$
- $M_x = C_x + C_{x+1} + \dots$
- $R_x = M_x + M_{x+1} + \dots$

x	q_x	l_x	d_x	$\mathring{e}$
20	0.001268	97813	124	59.67
21	0.001321	97689	129	58.75
22	0.001374	97560	134	57.82
23	0.001437	97426	140	56.90
24	0.001501	97286	146	55.98
25	0.001565	97140	151	55.07
26	0.001639	96988	159	54.15
27	0.001714	96829	166	53.24
28	0.001800	96663	174	52.33
29	0.001886	96489	182	51.42

$$\Rightarrow p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \qquad {}_kq_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}, \qquad {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

Садржај

1 Финансијска математика

2 Модел преостале дужине живота

3 Врсте животног осигурања

4 Осигурање личне ренте

5 Нето премије

6 Нето резерве премија

Осигурање наплативо на крају године смрти

врста осигурања	садашња вредност исплата	једнократна нето премија и дисперзија
доживотно за случај смрти	$Z = \upsilon^{K+1}$	$A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}$ $D(Z) = E(v^{2(K+1)}) - A_x$
привремено за случај смрти	$Z = \upsilon^{K+1} I\{K < n\}$	$A^1_{x:\overline{n}\rvert} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}$ $D(Z) = E(v^{2(K+1)}) - A_x$
за случај доживљења	$Z = \begin{cases} 0, & K < n \\ \upsilon^n, & K \geq n \end{cases}$	$A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}} = \upsilon^n P\{K \geq n\} = \upsilon^n{}_n p_x$ $D(Z) = v^{2n}{}_n p_x{}_n q_x$
мешовито	$Z = \begin{cases} \upsilon^{K+1}, & K < n \\ \upsilon^n, & K \geq n \end{cases}$	$A_{x:\overline{n}\rvert} = A^1_{x:\overline{n}\rvert} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}$
одложено	$Z = \upsilon^{K+1} I\{K \geq m\}$	${}_{m\rvert}A_x = {}_m p_x \upsilon^m A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}\rvert}$

Осигурање наплативо у тренутку смрти

$Z = v^T$

- $\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x| = \frac{i}{\delta} A_x$
- $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x| = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|}$
- $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x| = \frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A^1_{x:\overline{n}|}$
- ${}_{m|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\overline{m}|}$
- $A^{(m)}_x = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x| = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$

Општи типови животног осигурања

Са исплатом на крају године смрти:

- садашња вредност исплата: $Z = c_{K+1} v^{K+1}$
- једнократна нето премија:
$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = c_1 A_x + (c_2 - c_1)_{1|} A_x + (c_3 - c_2)_{2|} A_x + \cdots .$$
- ако је $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = 0$:
$E(Z) = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n) A^1_{x:\overline{n-1}|} + (c_{n-2} - c_{n-1}) A^1_{x:\overline{n-2}|} + \cdots .$

Са исплатом у тренутку смрти:

- садашња вредност исплата: $Z = c(T) v^T$
- једнократна нето премија: $E(Z) = \int\limits_0^{+\infty} c(t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$

Променљиво животно осигурање

Стандардно растуће доживотно осигурање

- садашња вредност исплата: $Z = (K+1)v^{K+1}$
- нето премија: $(IA)_x = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x q_{x+k}$

Стандардно растуће привремено осигурање

- садашња вредност исплата: $Z = (K+1)v^{K+1} I\{K < n\}$
- нето премија: $(IA)^1_{x:\overline{n}|} = A_x + {}_{1|}A_x + \cdots + {}_{n-1|}A_x - n\,{}_{n|}A_x$

Стандардно опадајуће привремено осигурање

- садашња вредност исплата: $Z = (n-K)v^{K+1} I\{K < n\}$
- нето премија: $(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x q_{x+k}$

Стандардно растуће доживотно осигурање са исплатом у тренутку смрти

- садашња вредност исплата: $Z = (K+1)v^T$
- нето премија: $(I\bar{A})_x = \frac{i}{r}(IA)_x$

Осигурање са непрекидном растућом сумом

- садашња вредност исплата: $Z = Tv^T$
- нето премија: $(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{r}(IA)_x - \frac{i}{r}A_x + \frac{i-r}{r^2}A_x$

Садржај

1. Финансијска математика
2. Модел преостале дужине живота
3. Врсте животног осигурања
4. Осигурање личне ренте
5. Нето премије
6. Нето резерве премија

Осигурање сталне годишње личне ренте

Непосредна доживотна лична рента платива унапред:

- $Y = 1 + v + v^2 + \cdots + v^K = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k I\{K \geq k\} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$
- једнократна нето премија: $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k\, {}_k p_x$

Непосредна лична рента ограниченог трајања платива унапред:

- $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} I\{K < n\} + \ddot{a}_{\overline{n}|} I\{K \geq n\}$
- једнократна нето премија: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_k p_x$

Непосредна доживотна лична рента платива накнадно:

- $Y = v + v^2 + \cdots + v^K = a_{\overline{K}|}$
- једнократна нето премија: $a_x = E(Y) = \ddot{a}_x - 1 = \frac{1-A_x}{d} - 1$

Непосредна лична рента ограниченог трајања платива накнадно:

- $Y = a_{\overline{K}|} I\{K < n\} + a_{\overline{n}|} I\{K \geq n\}$
- једнократна нето премија: $a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} v^k\, {}_k p_x$

Одложена доживотна лична рента платива унапред:

- $Y = (v^m + v^{m+1} + \cdots + v^K) I\{K \geq m\}$
- једнократна нето премија: ${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} v^k\, {}_k p_x = {}_m p_x v^m \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$

Веза исмеђу животног осигурања и ренте

$$Y = \frac{1-Z}{d}$$

- $\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d}$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}$
- $\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)} = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x|$

  $= \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}} \ddot{a}_x - \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n p_x \upsilon^n \ddot{a}_{x+n}^{(m)} = |\text{претпоставка линеарности}_u q_x|$

  $= \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i-i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}} (1 - {}_n p_x \upsilon^n)$
- $a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - {}_n p_x \upsilon^n)$

$$\alpha = \frac{di}{d^{(m)} i^{(m)}}, \qquad \beta = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} i^{(m)}}$$

Осигурање променљиве личне ренте

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k r_k I\{K \geq k\} \qquad EY = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k r_k \, {}_k p_x$$

$$Y = \int_0^T \upsilon^t r(t) dt \qquad EY = \int_0^{\infty} \upsilon^t r(t) \, {}_t p_x dt$$

Променљива животна рента са годишњом исплатом износа $r_k = k + 1$:

- $Y = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k (k+1) I\{K \geq k\}$, $(I\ddot{a})_x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \upsilon^k (k+1) \, {}_k p_x = \frac{\ddot{a}_x - (IA)_x}{d}$

Променљива животна рента са исплатом m пута годишње износа $z_{k+\frac{j}{m}} = \frac{k+1}{m}, j = 0, 1, \ldots, m-1$:

- $Y = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \upsilon^{k+\frac{j}{m}} \frac{k+1}{m} I\{K \geq k\}$, $(I\ddot{a})_x^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} {}_k p_x \upsilon^k \ddot{a}_{x+k}^{(m)}$

Променљива непрекидна животна рента са стопом исплате $r(t) = [t+1]$:

- $Y = \int\limits_0^T \upsilon^t [t+1] dt$, $(I\bar{a})_x = \int\limits_0^{+\infty} [t+1] \upsilon^t \, {}_t p_x dt = \alpha(\infty)(I\ddot{a})_x - \beta(\infty)\ddot{a}_x$

Променљива непрекидна животна рента са стопом исплате $r(t) = t$:

- $Y = \int\limits_0^T t\upsilon^t dt$, $(\bar{I}\bar{a})_x = \frac{\bar{a}_x - (\bar{I}\bar{A})_x}{r}$

Исплате које почињу у разломљеним деловима године

Претпоставимо да је ${}_u p_x$ линеарно

- $\ddot{a}_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x}\ddot{a}_x + \frac{u(1-q_x)}{1-uq_x}\ddot{a}_{x+1}$
- $A_{x+u} = \frac{1-u}{1-uq_x}A_x + \frac{u(1-q_x)}{1-uq_x}A_{x+1}$

Садржај

1 Финансијска математика

2 Модел преостале дужине живота

3 Врсте животног осигурања

4 Осигурање личне ренте

5 Нето премије

6 Нето резерве премија

Нето премија

Премија се назива нето премијом ако ако је очекивани губитак једнак нули.

$$\textbf{губитак осигуравача } (L) = \textbf{садашња вредност исплата } (Z) - \textbf{садашња вредност премија}$$

Осигурање за случај смрти - доживотно осигурање

Наступање осигураног случаја везује се за моменат смрти осигураног лица у ма које време се догодио.

- $Z = \upsilon^{K+1}$
- једнократна нето премија:
  $A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \upsilon^{k+1}{}_k p_x q_{x+k}$
- периодична премија са константним износом: $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$
- $DL = (1 + \frac{P_x}{d})^2 D(\upsilon^{K+1})$

- $Z = \upsilon^T$
- једнократна нето премија:
  $\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} \upsilon^t{}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{i}{r} A_x$
- периодична премија са константним износом: $\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$

Осигурање за случај смрти - привремено осигурање

Наступање осигураног случаја везује се за моменат смрти осигураног лица само ако се смрт догоди у одређеном периоду.

- $Z = \upsilon^{K+1} I\{K < n\}$
- једнократна нето премија: $A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$
- периодична премија са константним износом: $P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

- $Z = \upsilon^{T} I\{T < n\}$
- једнократна нето премија: $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int\limits_{0}^{n} \upsilon^{t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{i}{r} A^{1}_{x:\overline{n}|}$
- периодична премија са константним износом: $\bar{P}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$

Осигурање за случај доживљења

Осигурани случај настаје када осигураник доживи одређени број година.

- $Z = \upsilon^n I\{K \geq n\}$
- једнократна нето премија: $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \upsilon^n P\{K \geq n\} = \upsilon^n {}_n p_x$
- периодична премија са константним износом: $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

- $Z = \upsilon^t I\{T \geq t\}$
- једнократна нето премија: $\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \upsilon^t P\{T \geq t\} = \upsilon^t {}_t p_x$
- периодична премија са константним износом: $\bar{P}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$

Мешовито осигурање

Представља спој привременог осигурања и осигурања за случај доживљења.

- $Z = v^{K+1} I\{K < n\} + v^n I\{K \geq n\}$
- једнократна нето премија: $A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x$
- периодична премија са константним износом: $P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

- $Z = v^{K+1} I\{K < n\} + v^n I\{K \geq n\}$
- једнократна нето премија: $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{i}{r} A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = A_{x:\overline{n}|} + \left(\frac{i}{r} - 1\right) A^1_{x:\overline{n}|}$
- периодична премија са константним износом: $\bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$

Одложено осигурање

Исплата почиње након m година.

- $Z = \begin{cases} 0, & \text{за } K = 0, 1, ..., m-1; \\ \upsilon^{K+1}, & \text{за } K = m, m+1, m+2, ... \end{cases} = \upsilon^{K+1} I\{K \geq m\}$
- једнократна нето премија: ${}_{m|}A_x = E(Z) = {}_m p_x \upsilon^m A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m|}}$
- периодична премија са константним износом: $P_{x:\overline{n|}}^{\,1} \ddot{a}_{x+n}$

Премија која се плаћа m пута годишње

Нето премије се плаћају m пута годишње и износи који се плаћају су једнаки.

$$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}, \quad (P^1_{x:\overline{n|}})^{(m)} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}}, \quad (P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^{(m)} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}}, \quad P^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}},$$

$$P_x = \alpha(m)P_x^{(m)} - \beta(m)P_x^{(m)}P_x,$$
$$P^1_{x:\overline{n|}} = \alpha(m)(P^1_{x:\overline{n|}})^{(m)} - \beta(m)(P^1_{x:\overline{n|}})^{(m)}P^1_{x:\overline{n|}},$$
$$P_{x:\overline{n|}} = \alpha(m)P^{(m)}_{x:\overline{n|}} - \beta(m)P^{(m)}_{x:\overline{n|}}P^1_{x:\overline{n|}},$$
$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \alpha(m)(P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^{(m)} - \beta(m)(P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^{(m)}P^1_{x:\overline{n|}}.$$

Променљиво животно осигурање

- $Z = c_{K+1} v^{K+1}$
- једнократна нето премија:
  $E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1)_{1|}A_x + (c_3 - c_2)_{2|}A_x + \cdots$
- годишња нето премија се добија из израза:
  $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_{k+1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \Pi_k v^k {}_k p_x,$
  где су $\Pi_0, \Pi_1, ..., \Pi_k$ годишње нето премије

- $Z = c(T) v^T$
- једнократна нето премија: $E(Z) = \int\limits_0^{+\infty} c(t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$
- годишња нето премија се добија из израза:

$$\int\limits_0^{+\infty} c(t) v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int\limits_0^{+\infty} \pi(t) v^t {}_t p_x dt,$$

  где је $\pi(t), t \in (0, T)$ апсолутно непрекидна нето премија

Садржај

1. Финансијска математика
2. Модел преостале дужине живота
3. Врсте животног осигурања
4. Осигурање личне ренте
5. Нето премије
6. Нето резерве премија

Нето резерве премија

$$\begin{matrix} \textbf{губитак} & & \textbf{садашња} & & \textbf{садашња} \\ \textbf{осигуравача} & = & \textbf{вредност} & - & \textbf{вредност} \\ \textbf{у тренутку } t < T, ({}_tL) & & \textbf{исплата} & & \textbf{премија} \end{matrix}$$

${}_tV$—нето резерва премија у тренутку t

Опште осигурање: ${}_kV = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1}\upsilon^{j+1}{}_jp_{x+k}q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty}\Pi_{k+j}\upsilon^j{}_jp_{x+k}$

Рекурзивна формула: ${}_kV + \Pi_k = \upsilon(c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}Vp_{x+k})$

У деловима године: ${}_{k+u}V =_k V\upsilon^{1-u} + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)\upsilon^{1-u}{}_{1-u}q_{x+k+u}$

$= |\text{претпоставка линеарности}_u q_x|$

$= \frac{1-u}{1-uq_{x+k}}({}_kV + \Pi_k)(1+i)^u + (1 - \frac{1-u}{1-uq_{x+k}})_{k+1}V\upsilon^{1-u}$

Компоненте премије: $\Pi_k = \Pi_k^s + \Pi_k^r = {}_{k+1}V\upsilon - {}_kV + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)\upsilon q_{x+k}$,

премија за штедњу и ризик премија

Нето резерве премија доживотног осигурања

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - (P_x + d)\ddot{a}_{x+k} \\
&= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \\
&= \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \\
&= (1 - \frac{P_x}{P_{x+k}})A_{x+k} \\
&= (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k}
\end{aligned}
$$

Расподела укупног губитка током трајања полисе

Λ_k–губитак осигуравача током $(k+1)$–године

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & K \leq k-1 \\ c_{k+1}\upsilon - ({}_kV + \Pi_k), & K = k \\ {}_{k+1}V\upsilon - ({}_kV + \Pi_k), & k \geq k+1 \end{cases}$$

$E\Lambda_k = 0$

$L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \upsilon^k$ укупан губитак осигуравача

$DL = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{2k} D\Lambda_k = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{2k+2}(c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 {}_{k+1}p_x q_{x+k}$