

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А (4ЛМН) - Други колоквијум 14.01.2018.

1. Ако случајна величина X има униформну $\mathcal{U}[0, 2]$ расподелу, одредити функцију расподеле случајне величине e^{X^2} . (3 поена)

Решење:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^{X^2} \leq y\} = P\{X \leq \sqrt{\ln y}\} = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln y}}{2}, & 1 \leq y \leq e^4 \\ 1, & y > e^4 \end{cases}$$

2. Нека су X_1, X_2 и X_3 међусобно (по паровима) независне случајне величине, и за свако $i \in \{1, 2, 3\}$ $EX_i = i$ и $DX_i = 4$. Одредити коефицијент корелације случајних величина $X_1 - X_2$ и $X_2 + X_3$. (3 поена)

Решење:

$$\begin{aligned} \rho(X_1 - X_2, X_2 + X_3) &= \frac{E[(X_1 - X_2)(X_2 + X_3)] - E(X_1 - X_2)E(X_2 + X_3)}{\sqrt{D(X_1 - X_2)D(X_2 + X_3)}} = |\text{независност}| \\ &= \frac{E(X_1)E(X_2) + E(X_1)E(X_3) - E(X_2^2) - E(X_2)E(X_3) - (E(X_1) - E(X_2))(E(X_2) + E(X_3))}{\sqrt{(D(X_1) + D(X_2))(D(X_2) + D(X_3))}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Делимично је дата табела заједничке расподеле димензионалне случајне величине (X, Y) :

$X \setminus Y$	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 1$	0.05	0.1	0.1
$X = 2$		0.2	
$X = 3$		0.1	0.1

Допунити табелу, ако се зна да су случајне величине X и Y независне.

(3 поена)

Решење:

$$0.2 = P\{X = 2, Y = 0\} = P\{X = 2\}P\{Y = 0\} = 0.4P\{X = 2\} \Rightarrow P\{X = 2\} = 0.5$$

$$0.1 = P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = 0.25P\{Y = 1\} \Rightarrow P\{Y = 1\} = 0.4$$

$$P\{X = 2, Y = -1\} = P\{X = 2\}P\{Y = -1\} = 0.5(1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\}) = 0.1$$

$$P\{X = 3, Y = -1\} = P\{X = 3\}P\{Y = -1\} = (1 - P\{X = 1\} - P\{X = 2\})(1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\}) = 0.05$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = P\{X = 2\}P\{Y = 1\} = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

4. Нека је X случајна величина из нормалне $\mathcal{N}(8, 64)$ расподеле. Израчунати $P\{0 < X < 24 | X \geq 4\}$. (3 поена)

Решење:

$$P\{0 < X < 24 | X \geq 4\} = \frac{P\{0 < X < 24, X \geq 4\}}{P\{X \geq 4\}} = \frac{P\{4 \leq X < 24\}}{1 - P\{X < 4\}} = \frac{P\{\frac{4-8}{\sqrt{64}} \leq X^* < \frac{24-8}{\sqrt{64}}\}}{1 - P\{X^* < \frac{4-8}{\sqrt{64}}\}} = \frac{\Phi(2) - \Phi(-0.5)}{1 - \Phi(-0.5)} = 0.97$$

5. Дата је функција $f(x) = \frac{1}{c\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$, $x \in R$, $\lambda > 0$. Одредити скуп свих вредности константе c за које је функција f густина расподеле. (3 поена)

Решење:

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow c > 0$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow c = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = 2$