ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - КОЛОКВИЈУМ 2
30. ЈАНУАР 2016.

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(t) = \begin{cases} c\,t\,e^{-t^2} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases} .$$

а) Одредити $c \in \mathbb{R}$ тако да функција f буде густина расподеле случајне величине X. (2 поена)

б) Израчунати математичко очекивање $E(X)$ и дисперзију $D(X)$. (3 поена)

в) Одредити расподелу случајне величине $Y = X^2$. (3 поена)

г) Израчунати коефицијент корелације $\rho(X, Y)$. (2 поена)

Решење. а) Услови који треба да буду испуњени:

- $c \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

$\int\limits_0^\infty cte^{-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t^2 = u \\ 2tdt = du \end{array} \right| = \frac{c}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}du = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$

б) $EX = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \int_0^\infty 2t^2e^{-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t^2 = u \\ 2tdt = du \end{array} \right| = \int_0^\infty \sqrt{u}e^{-u} = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2f(t)dt = \int_0^\infty 2t^3e^{-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t^2 = u \\ 2tdt = du \end{array} \right| = \int_0^\infty ue^{-u} = \Gamma(1) = 1$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

в) $P\{Y \leq t\} = P\{X^2 \leq t\} = P\{X \leq \sqrt{t}\} = F(\sqrt{t}) = \int_0^{\sqrt{t}} 2xe^{-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = u \\ 2xdt = du \end{array} \right| = \int_0^t e^{-u}du = 1 - e^{-t}$

$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$

г) $E(XY) = E(X^3) = \int_0^\infty 2t^4e^{-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t^2 = u \\ 2tdt = du \end{array} \right| = \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}}e^{-u} = \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 1}{\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4-\pi}}$

2. Троугао Δ има темена $O = (0, 0)$, $A = (1, 3)$ и $B = (2, 1)$. Нека случајни вектор (X, Y) има униформну расподелу на (правоуглом) троуглу Δ, односно $(X, Y) \in \mathscr{U}(\Delta)$.

а) Одредити густину расподеле случајног вектора (X, Y), односно $f_{X,Y}$. (1 поен)

б) Одредити маргиналне густине расподела f_X и f_Y. (2 поена)

в) Одредити расподелу случајне величине $Z = Y - X$. (3 поена)

г) Одредити $f_{Y\,|\,X\in(0,1)}$ - условну густину расподеле. (4 поена)

Решење. а) Прав угао троугла је код темена Б, па је површина троугла: $m(\Delta) = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$. Тражена густина је:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m(\Delta)} = \frac{2}{5}, & (x, y) \in \Delta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

б) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \int_{x/2}^{3x} \frac{2}{5}dy = \frac{2}{5}(3x - \frac{x}{2}) = x, & x \in [0, 1) \\ \int_{x/2}^{5-2x} \frac{2}{5}dy = \frac{2}{5}(5 - 2x - \frac{x}{2}) = 2 - x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \begin{cases} \int_{y/3}^{2y} \frac{2}{5}dx = \frac{2}{5}(2y - \frac{y}{3}) = \frac{2y}{3}, & x \in [0, 1) \\ \int_{y/3}^{5/2-y/2} \frac{2}{5}dx = \frac{2}{5}(\frac{5}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y}{3}) = 1 - \frac{y}{3}, & x \in [1, 3] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

в) $F_Z(z) = P\{Y - X \le z\}$

$$= \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \int_{-2z}^{5/3-z/3} \int_{x/2}^{x+z} \frac{2}{5} dydx + \int_{5/3-z/3}^{2} \int_{x/2}^{5-2x} \frac{2}{5} dydx = \cdots = \frac{1}{3}(z+1)^2, & -1 \le z < 0 \\ \int_0^{z/2} \int_{x/2}^{3x} \frac{2}{5} dydx + \int_{z/2}^{5/3-z/3} \int_{x/2}^{x+z} \frac{2}{5} dydx + \int_{5/3-z/3}^{2} \int_{x/2}^{5-2x} \frac{2}{5} dydx = \cdots = -\frac{1}{6}(z^2 - 4z - 2), & 0 \le z \le 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases}$$

г) $F_{Y\,|\,X\in(0,1)}(y) = P\{Y \le y \,|\, X \in (0,1)\} = \frac{P\{Y \le y, X \in (0,1)\}}{P\{X \in (0,1)\}}$

$P\{X \in (0,1)\} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

$$P\{Y \le y_0, X \in (0,1)\} = \begin{cases} 0, & y_0 < 0 \\ \int_0^{y_0/3} \int_{x/2}^{3x} \frac{2}{5} dydx + \int_{y_0/3}^{2y_0} \int_{x/2}^{y_0} \frac{2}{5} dydx = \cdots = \frac{y_0^2}{3}, & 0 \le y_0 < \frac{1}{2} \\ \int_0^{y_0/3} \int_{x/2}^{3x} \frac{2}{5} dydx + \int_{y_0/3}^{1} \int_{x/2}^{y_0} \frac{2}{5} dydx = \cdots = -\frac{1}{15} y_0^2 + \frac{2}{5} y_0 - \frac{1}{10}, & \frac{1}{2} \le y_0 \le 3 \\ \frac{1}{2}, & y_0 > 3 \end{cases}$$

$$F_{Y\,|\,X\in(0,1)}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2y^2}{3}, & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{15} y^2 + \frac{4}{5} y - \frac{1}{5}, & \frac{1}{2} \le y \le 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

$$f_{Y\,|\,X\in(0,1)}(y) = \begin{cases} \frac{4}{3} y, & y \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{4}{15} y + \frac{4}{5}, & y \in [\frac{1}{2}, 3] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомена. Једначина праве кроз две тачке $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ је: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.