ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - КОЛОКВИЈУМ 2
15. ЈУН 2014.

1. Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узорак из $\mathscr{U}[\theta, 2\theta]$ расподеле, где је $\theta > 0$ непознати параметар.

а) Записати функцију веродостојности. (2 поена)

б) Доказати да је оцена максималне веродостојности непознатог параметра θ дата са $\widehat{\theta_n} = \dfrac{X_{(n)}}{2}$. (4 поена)

в) Да ли је $\widehat{\theta_n}$ постојана оцена параметра θ? (4 поена)

Решење

Нека је реализован узорак $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$.

а) Густина расподеле је дата са $\quad f_X(t) = \dfrac{1}{\theta} \cdot I\{t \in [\theta, 2\theta]\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Функција веродостојности је дата са:
$L(\theta) = f_X(t_1) \cdot f_X(t_2) \cdot \dots \cdot f_X(t_n) = \dfrac{1}{\theta^n} \cdot I\{t_1, \dots, t_n \in [\theta, 2\theta]\}$; односно,
$L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^n} \cdot I\{\min\{t_1, \dots, t_n\} \geq \theta\} \cdot I\{\max\{t_1, \dots, t_n\} \leq 2\theta\}$.

б) Функција веродостојности узима највећу вредност кад је θ најмање.
Најмања дозвољена вредност за параметар θ се може извести из неједнакости:

$$\max\{t_1, \dots, t_n\} \leq 2\theta,$$

а то је управо $\widehat{\theta_n} = \dfrac{\max\{t_1, \dots, t_n\}}{2} = \dfrac{X_{(n)}}{2}$.

в) Оцена $\widehat{\theta_n}$ је постојана оцена параметра θ уколико важи $\widehat{\theta_n} \xrightarrow{P} \theta$, односно ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \to +\infty} P\left\{\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0\,.$$

Чебишовљева нејднакост каже да је $P\left\{\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{E(\widehat{\theta_n} - \theta)^2}{\varepsilon^2}$. Дакле, израчунајмо $E(\widehat{\theta_n} - \theta)^2$.

$$F_{\widehat{\theta_n}}(t) = P\left\{\widehat{\theta_n} \leq t\right\} = P\left\{X_{(n)} \leq 2t\right\} = P\left\{\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq 2t\right\} = \left[F_X(2t)\right]^n\,.$$

$$f_{\widehat{\theta_n}}(t) = F'_{\widehat{\theta_n}}(t) = 2n \cdot \left[F_X(2t)\right]^{n-1} \cdot f_X(2t) = 2n \cdot \left(\frac{2t - \theta}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}, \text{ за } 2t \in [\theta, 2\theta], \text{ односно } t \in \left[\frac{\theta}{2}, \theta\right].$$

$$E(\widehat{\theta_n} - \theta)^2 = \int\limits_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} (t - \theta)^2 \cdot 2n \cdot \left(\frac{2t - \theta}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot dt = \left[\begin{array}{c} u = \frac{2t-\theta}{\theta} \\ 2t = \theta(u+1) \\ 2\,dt = \theta\,du \end{array}\right] = n \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{\theta(u+1)}{2} - \theta\right)^2 u^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \theta\,du$$

$$E(\widehat{\theta_n} - \theta)^2 = \frac{n\theta^2}{4} \int\limits_{0}^{1} (u-1)^2 \cdot u^{n-1}\,du = \frac{n\theta^2}{4}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\theta^2}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Сада видимо да је: $P\left\{\left|\widehat{\theta_n} - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{\theta^2}{2\varepsilon^2 \cdot (n+1)(n+2)} \longrightarrow 0$, кад $n \to +\infty$.
Самим тим, закључујемо да је $\widehat{\theta_n}$, заиста, постојана оцена параметра θ.

2. На основу узорка обима $n = 16$ из нормалне расподеле добијене су узорачка средина и узорачка дисперзија $\overline{x}_{16} = 23.6$ и $\overline{s}_{16}^2 = 9$.

а) Објаснити како се у овом случају добија интервал поверења за непознато математичко очекивање m са датим нивоом поверења β. (4 поена)

б) Одредити интервал поверења ако је $\beta = 0.90$. (3 поена)

в) Одредити интервал поверења ако је $\beta = 0.98$. (3 поена)

Решење

а) Знамо да статистика $\dfrac{\overline{X_n} - m}{\overline{S_n}}\sqrt{n-1}$ има t_{n-1} расподелу (Студентову са $n-1$ степени слободе). У таблицама за Студентову расподелу можемо пронаћи константу c_β тако да буде

$$P\left\{-c_\beta \leq \frac{\overline{X_n} - m}{\overline{S_n}}\sqrt{n-1} \leq c_\beta\right\} = \beta\ .$$

Тада је β-интервал поверења за математичко очекивање: $\left[\overline{X_n} - \dfrac{c_\beta \cdot \overline{S_n}}{\sqrt{n-1}},\ \overline{X_n} + \dfrac{c_\beta \cdot \overline{S_n}}{\sqrt{n-1}}\right]$.

б) **Нека случајна величина Y има Студентову t_{15} расподелу.**

У таблицама нађемо константу $c_{0.90}$ такву да је $P\{-c_{0.90} \leq Y \leq c_{0.90}\} = 0.90$,
односно $P\{Y \leq c_{0.90}\} = 0.95$,
односно $P\{0 \leq Y \leq c_{0.90}\} = 0.45$ и формирамо одговарајући интервал поверења.

в) У таблицама нађемо константу $c_{0.98}$ такву да је $P\{-c_{0.98} \leq Y \leq c_{0.98}\} = 0.98$,
односно $P\{Y \leq c_{0.98}\} = 0.99$,
односно $P\{0 \leq Y \leq c_{0.98}\} = 0.49$ и формирамо одговарајући интервал поверења.