ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - ТЕСТ 2
30. ЈАНУАР 2016.

1. Дефинисати n-димензиону функцију расподеле вероватноћа. (3 поена)

Решење. Функција $F : R^n \to R$ зове се $n-$димензиона функција расподеле ако важе следећи услови:

1) $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F(x_1, ..., x_n) = 0, \forall k = \overline{1, n}$
2) $F(+\infty, ..., +\infty) = 1$
3) F је непрекидна са десне стране по сваком аргументу
4) $\triangle_F(I) \geq 0$ за сваки n-димензиони интервал I, где је $\Delta_F(I) = \sum_x z_I(x)F(x)$ и
$z_I(x) = \begin{cases} +1, & \text{ако је број индекса } k \text{ за које важи } x_k = a_k \text{ паран;} \\ -1, & \text{ако је број индекса } k \text{ за које важи } x_k = a_k \text{ непаран.} \end{cases}$
$I = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$

2. Дефинисати коефицијент корелације случајних величина и навести његове особине. (3 поена)

Решење. Нека су X и Y случајне величине са коначним и строго већим од нуле дисперзијама. Коефицијент корелације случајних величина X и Y је број: $\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$.
Особине коефицијента корелације:

а) $|\rho(X, Y)| \leq 1$
б) $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X, Y$ су линеарно повезане
в) $|\rho(X, Y)| = 0 \Rightarrow X, Y$ су некорелисане
г) X, Y независне $\Rightarrow \rho(X, Y) = 0$

3. Ако случајна величина X има Пуасонову $\mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ расподелу, израчунати следећу условну вероватноћу: $\Pi_k = \mathbb{P}\{X = k \mid X > 0\}$, $k \in \mathbb{N}$. (2 поена)

Решење. $X : \mathscr{P}(\lambda), \lambda > 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, ...$
$\Pi_k = \mathbb{P}\{X = k | X > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{X=k, X>0\}}{\mathbb{P}\{X>0\}} = \frac{\mathbb{P}\{X=k\}}{1-\mathbb{P}\{X=0\}} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

4. Коцка за игру се баца 30 пута. Израчунати биномну вероватноћу и одговарајућу Пуасонову апроксимацију да број добијених шестица буде једнак 2. (2 поена)

Решење. $n = 30$
$X : \mathscr{B}(30, \frac{1}{6}) \Rightarrow \mathbb{P}\{X = 2\} = \binom{30}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{28} \approx 0.073$
$Y : \mathscr{P}(\frac{30}{6}) \Rightarrow \mathbb{P}\{X = 2\} = \frac{5^2}{2!} e^{-5} \approx 0.084$