ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - ТЕСТ 1
9. НОВЕМБАР 2013.

1. Новчић се баца три пута.
(а) Записати скуп свих могућих исхода.
(б) Означимо са A_k догађај да је у k-том бацању пало писмо, $k \in \{1, 2, 3\}$. Користећи скуповне операције представити преко A_1, A_2 и A_3 догађај да је пало тачно једно писмо.

2. Коцка за игру чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6 баца се два пута. Колика је вероватноћа догађаја да је у првом бацању пао мањи број него у другом бацању?

3. Студент је полагао три испита. Сваки испит полаже са вероватноћом 1/2, а полагања различитих испита су независни догађаји.
(а) Представити скуп могућих исхода и догађаје: А - студент није положио све испите; Б - студент је положио бар један испит.
(б) Ако студент није положио све испите, одредити вероватноћу догађаја да је положио бар један испит.

4. Коцка за игру баца се два пута. Нека је X број добијених шестица. Одредити расподелу вероватноћа случајне величине X.

5. Случајна величина X узима вредности 0, 1 и 5 са вероватноћом 1/3. Израчунати математичко очекивање и дисперзију случајне величине X.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - КОЛОКВИЈУМ 1
16. НОВЕМБАР 2013.

1. Ана и Петар полажу 6 истих испита. Сваки испит Ана полаже са вероватноћом 3/4, а Петар са вероватноћом 2/3. Полагања различитих испита су независни догађаји. Нека је X број испита које је положила Ана, Y број испита које је положио Петар, Z број испита које су положили и Ана и Петар, а W број испита које је положио бар неко од њих двоје.

(а) Коју расподелу вероватноћа има случајна величина X, а коју Y? (2 поена)

(б) Израчунати $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$. (3 поена)

(в) Одредити расподелу вероватноћа случајне величине Z. (2 поена)

(г) Одредити расподелу вероватноћа случајне величине W. (3 поена)

2. Изводи се низ независних бацања хомогене коцке за игру чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6. Нека је X број изведених бацања до појаве шестице, а Y број бацања до појаве непарног броја.

(а) За сваки природан број n одредити $P\{X = n\}$ и $P\{Y = n\}$. (2 поена)

(б) Израчунати математичка очекивања $E(X)$ и $E(Y)$. (2 поена)

(в) За природне бројеве n и k одредити вероватноће догађаја $\{X = n, Y = n + k\}$, $\{X = n, Y = n\}$ и $\{X = n + k, Y = n\}$. (3 поена)

(г) Израчунати вероватноћу догађаја $\{X < Y\}$, тј. вероватноћу да ће се шестица појавити пре непарног броја. (3 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - ТЕСТ 2
21. ДЕЦЕМБАР 2013.

1. Да ли је скуп рационалних бројева Борелов скуп? Образложи одговор!

2. (а) Ако је $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$ и $P(AB) = 0.3$, израчунати $P(A \cup B)$.

(б) Формулисати својство непрекидности вероватноће одозго.

3. Функција $F : R \to R$ дата је са $F(x) = 0$ за $x < 0$ и $F(x) = \dfrac{x}{1+x}$ за $x \geqslant 0$. Да ли је F функција расподеле вероватноћа?

4. Нека су $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ дате константе. Одредити константу $C > 0$ тако да функција $f : R \to R$, која је дата са $f(x) = 0$ за $x \leqslant 0$ и

$$f(x) = Cx^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad \text{за } x > 0,$$

представља густину расподеле.

5. Ако су $F(x)$ и $G(y)$ функције расподеле вероватноћа, да ли је функција $F(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ дводимензиона функција расподеле?

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - КОЛОКВИЈУМ 2
20. ЈАНУАР 2014.

1. Нека је X случајна величина која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу са густином

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{ако је } x \geqslant 0 \quad (\lambda > 0 \text{ је параметар}),$$

и $f(x) = 0$ ако је $x < 0$. Нека је $Y = [X]$, тј. $Y(\omega) = k$ ако је $k \leqslant X(\omega) < k + 1$, где је $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(а) За сваки ненегативан цео број k израчунати $P\{Y = k\}$. (3 поена)

(б) Коју расподелу вероватноћа има случајна величина Y? (1 поен)

(в) Израчунати математичко очекивање случајне величине X. (3 поена)

(г) Израчунати математичко очекивање случајне величине Y. (3 поена)

2. Случајна величина X има равномерну расподелу на интервалу $[0, 1]$.

(а) За $0 < t < 1/2$ израчунати $P\left\{X \leqslant t \middle| X \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$ и $P\left\{1 - X \leqslant t \middle| X > \dfrac{1}{2}\right\}$. (4 поена)

(б) Нека је Y случајна величина која представља дужину краћег од интервала $[0, X]$ и $[X, 1]$. Одредити функцију расподеле случајне величине Y. (2 поена)

(в) Одредити густину расподеле случајне величине Y. (1 поен)

(г) Одредити математичко очекивање и дисперзију случајне величине Y. (3 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА А - ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ 14. ФЕБРУАР 2014.

Питање 1. Дати су дисјунктни догађаји A и B такви да је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Да ли су догађаји A и B зависни или независни? (2 поена)

Питање 2. Написати дефиницију коефицијента корелације случајних величина X и Y. (2 поена)

Задатак 1. Нека су X и Y независне случајне величине са равномерном расподелом на интервалу $[0, 1]$.

(а) Написати израз за густину расподеле $f(x, y)$ случајног вектора (X, Y). (1 поен)

(б) Израчунати $P\{X - Y \leqslant 3/4\}$. (2 поена)

(в) Израчунати $P\{|X - Y| \leqslant 1/2\}$. (2 поена)

Задатак 2. Коцка за игру чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6 баца се 1800 пута. Нека је S_{1800} број добијених шестица.

(а) Одредити математичко очекивање случајне величине S_{1800}. (1 поен)

(б) Одредити дисперзију случајне величине S_{1800}. (1 поен)

(в) Користећи Муавр-Лапласову теорему израчунати $P\{280 \leqslant S_{1800} \leqslant 320\}$. (3 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - ТЕСТ 1
5. АПРИЛ 2014.

1. Одредити карактеристичну функцију случајне величине X чија је расподела дата са $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = 1/2$.

2. Ако је $\varphi(t)$ карактеристична функција случајне величине X, одредити карактеристичну функцију случајне величине $2X + 3$.

3. Дат је низ случајних величина $(X_n)_{n\geqslant 1}$, такав да X_n има равномерну расподелу на интервалу $[0, n]$.
(а) Нека је F_n функција расподеле случајне величине X_n. За сваки реалан број x одредити $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$.
(б) Да ли низ (X_n) конвергира у расподели ка некој случајној величини?

4. Без доказивања одговорити која су од следећих тврђења тачна:
(а) Из конвергенције у вероватноћи следи скоро сигурна конвергенција.
(б) Из конвергенције у вероватноћи следи конвергенција у расподели.
(в) На дискретном простору вероватноћа из конвергенције у вероватноћи следи скоро сигурна конвергенција.
(г) Из конвергенције у расподели следи средњеквадратна конвергенција.

5. Формулисати централну граничну теорему за низ независних случајних величина са истом расподелом.

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - КОЛОКВИЈУМ 1
12. АПРИЛ 2014.

1. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина, такав да X_n има равномерну расподелу на интервалу $[0, n]$. Означимо $Y_n = \dfrac{X_n}{1 - X_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
(а) Одредити функцију расподеле случајне величине Y_n. (2 поена)
(б) Испитати све четири врсте конвергенције низа $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (4×2 поена)

2. Коцка за игру баца се 1000 пута. Нека је S_{1000} збир добијених бројева.
(а) Израчунати $E(S_{1000})$ и $D(S_{1000})$. (2 поена)
(б) Израчунати вероватноће догађаја: $\{3450 \leqslant S_{1000} \leqslant 3650\}$, $\{S_{1000} \geqslant 3600\}$. (5 поена)
(в) Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да важи $P\{3500 - a < S_{1000} \leqslant 3500 + a\} = 0.8$. (3 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - ТЕСТ 2
25. МАЈ 2014.

1. Нека су $X_1, \ldots, X_n$ независне случајне величине које имају исту функцију расподеле F. Одредити функцију расподеле случајне величине $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. (2 поена)

2. Дат је реализовани узорак $x_1 = 2$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$. Одредити вредност емпиријске функције расподеле у тачки x, ако је:
(а) $x = 1.5$, (б) $x = 2.8$. (2 поена)

3. Које две статистике се користе за одређивање интервала поверења за математичко очекивање код нормалне расподеле? (2 поена)

4. Да ли је узорачка средина центрирана оцена математичког очекивања и зашто? (2 поена)

5. Нека је $\overline{S}_n^2$ узорачка дисперзија дефинисана на основу простог случајног узорка $(X_1, \ldots, X_n)$, при чему је $D(X_1) = \sigma^2$. Да ли је $\overline{S}_n^2$ јако постојана оцена параметра σ^2 и зашто? (2 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - КОЛОКВИЈУМ 2
15. ЈУН 2014.

1. Нека је $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ узорак из $\mathcal{U}[\theta, 2\theta]$ расподеле, где је $\theta > 0$ непознати параметар.
(а) Записати функцију веродостојности. (2 поена)
(б) Доказати да је оцена максималне веродостојности непознатог параметра θ дата са $\widehat{\theta}_n = X_{(n)}/2$. (4 поена)
(в) Да ли је $\widehat{\theta}_n$ постојана оцена параметра θ? (4 поена)

2. На основу узорка обима $n = 16$ из нормалне расподеле добијене су узорачка средина и узорачка дисперзија $\overline{x}_{16} = 23.6$ и $\overline{s}_{16}^2 = 9$.
(а) Објаснити како се у овом случају добија интервал поверења за непознато математичко очекивање m са датим нивоом поверења β. (4 поена)
(б) Одредити интервал поверења ако је $\beta = 0.90$. (3 поена)
(в) Одредити интервал поверења ако је $\beta = 0.98$. (3 поена)

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б - ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ
22. ЈУН 2014.

Питање 1. Дефинисати узорачку дисперзију и извести формулу за њено математичко очекивање. (2 поена)

Питање 2. Формулисати Гливенко-Кантелијеву централну теорему математичке статистике. (2 поена)

Задатак 1. Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ узорак из експоненцијалне расподеле са параметром $\lambda > 0$.

(а) Одредити оцену максималне веродостојности параметра λ. (2 поена)

(б) Испитати постојаност добијене оцене. (3 поена)

Задатак 2. Резултат бацања коцке за игру је случајна величина X чија је расподела дата са

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix}$$

У 360 бацања добијени су следећи резултати: 58 јединица, 65 двојки, 63 тројке, 56 четворки, 53 петице и 65 шестица. Са прагом значајности $\alpha = 0.05$ тестирати хипотезу $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$, против алтернативе да не важи H_0. (5 поена)