Линдеберг-Фелерова теорема

Нека је дата схема серија случајних величина

$$\begin{array}{cccc} X_{11}, & X_{12}, & \ldots & X_{1k_1}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots & X_{2k_2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1}, & X_{n2}, & \ldots & X_{nk_n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{1}$$

таква да важе следећи услови

а) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$;

б) за свако n случајне величине $X_{n1}, X_{n,2}, ..., X_{nk_n}$ су независне;

в) $EX_{nj} = 0$ за свако n и свако $j \in \{1, 2, ..., k_n\}$;

г) $DX_{n1} + DX_{n2} + ... + DX_{nk_n} = 1$ за свако n.

Теорема 1 (Линдеберг-Фелерова теорема)**.** *Дата је схема серија* (1) *таква да важе услови а)-г). Тада следећа два тврђења*

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \xrightarrow{D} Z \in \mathcal{N}(0,1), n \to \infty, \textit{(централна гранична теорема)} \tag{2}$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = 0 \textit{ (равномерна асимптотска занемарљивост)}, \tag{3}$$

важе ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ *важи Линдебергов услов*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) = 0, \tag{4}$$

где је F_{nj} *је функција расподеле случајне величине* X_{nj}.

Када би код (4) интеграл био на $\mathbb{R}$ онда би то била дисперзија, међутим овај услов се односи на репове расподеле.

Доказ. $\Longleftarrow$ Прво доказујемо довољност Линдеберговог услова. Приметимо да је

$$\sum_{j=1}^{k_n} P\{|X_{nj}| > \varepsilon\} = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nj}(x) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x),$$

одакле добијамо да из Линдеберговог услова (4) следи услов равномерне асимптотске занемарјивости (3).

Даље, нека је φ_{nj} карактеристична функција случајне величине X_{nj} и $\sigma_{nj}^2 = DX_{nj}$. Да бисмо доказали да из Линдеберговог услова следи ЦТГ (2) довољно је доказати да за свако $t \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Односно треба показати да

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = o(1).$$

Приметимо да, како је $\sum\limits_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| &= \left|\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}}\right| \\
&= \left|\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) + \prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) - \prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}}\right| \\
&\leq \left|\prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right)\right| + \left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) - \prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}}\right|.
\end{aligned}$$

Размотримо сваки члан посебно.

С обзиром да је $EX_{nj} = 0$, то је $\varphi_{nj}(t) = 1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} + \rho_{nj}(t)$. Како је $\int_{\mathbb{R}} dF_{nj} = 1$ и $\int_{\mathbb{R}} x^2 dF_{nj} = \sigma_{nj}^2$, добијамо

$$\varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2}{2}x^2\right) dF_{nj}.$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right| \leq \sum_{j=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right| dF_{nj}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\varepsilon}\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right| dF_{nj}(x) + \int_{|x|\geq\varepsilon}\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right| dF_{nj}(x)\right)
\end{aligned}$$

Приметимо да

$$\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| \leq \min\left\{\frac{|x|^3}{6}, x^2\right\}.$$

$$\begin{aligned}
|e^{ix} - 1| &\leq \left|\int_0^x e^{it} dt\right| \leq \int_0^x |e^{it}| dt = \int_0^x dt = x, \\
|e^{ix} - 1 - ix| &\leq \left|\int_0^x (e^{it} - 1) dt\right| \leq \int_0^x |e^{it} - 1| dt \leq \int_0^x \min\{t, 2\} dt = \min\left\{\frac{x^2}{2}, 2x\right\} \\
\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| &= \left|\int_0^x (e^{it} - 1 - it) dt\right| \leq \int_0^x |e^{it} - 1 - it| dt \\
&\leq \int_0^x \min\left\{\frac{t^2}{2}, 2t\right\} dt = \min\left\{\frac{x^2}{6}, x^2\right\}
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right| &\leq \frac{|t|^3}{6}\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} |x|^3 dF_{nj}(x) + t^2\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\geq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) \\
&\leq \frac{|t|^3}{6}\varepsilon\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^2 + t^2\sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|\geq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x).
\end{aligned}$$

Даље на основу Линдеберговог услова други сабирак конвергира ка 0 и како је $DX_{n1} + DX_{n2} + ... + DX_{nk_n} = 1$ за свако n добијамо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right| \leq \frac{|t|^3\varepsilon}{6}.$$

С обзиром да ε може бити произвољан позитиван број, то следи

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right| = 0. \tag{5}$$

Даље, користећи да је $|\varphi_{nj}(t)| \leq 1$ и $1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \leq \varphi_{nj}(t)$, следи

$$\begin{aligned}
&\left| \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right| \\
&\quad = \left| \prod_{j=1}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}\right) \prod_{j=2}^{k_n} \varphi_{nj}(t) + \left(1 - \frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}\right) \prod_{j=2}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right| \\
&\quad = \left| \left(\varphi_{n1}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}\right) \prod_{j=2}^{k_n} \varphi_{nj}(t) + \left(1 - \frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2}\right) \left(\prod_{j=2}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=2}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right) \right| \\
&\quad \leq \left| \varphi_{n1}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{n1}^2}{2} \right| + \left| \prod_{j=2}^{k_n} \varphi_{nj}(t) - \prod_{j=2}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right| \\
&\quad \leq ... \leq \sum_{j=1}^{k_n} \left| \varphi_{nj}(t) - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right|,
\end{aligned}$$

где последњи израз конвергира ка 0 из (5).

Размотримо сада $\left| \prod\limits_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}} - \prod\limits_{j=1}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right|$. Слично као претходно и из Тејлоровог развоја $e^x = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$, следи

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}} - \prod_{j=1}^{k_n} \left(1 - \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right) \right| &\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left| e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}} - 1 + \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right| = \sum_{j=1}^{k_n} \left| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}\sigma_{nj}^{2l}}{2^l l!} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k_n} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\left|t^2\sigma_{nj}^2\right|^l}{2^l l!} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{t^4\sigma_{nj}^4}{4} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\left|t^2\sigma_{nj}^2\right|^{l-2}}{2^{l-2} l!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right| &= \left| \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj}(x) \right| \leq \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj}(x) \\
&= \frac{t^2}{2} \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) + \frac{t^2}{2} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) \leq \frac{t^2}{2}\varepsilon^2 + \frac{t^2}{2} \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x)
\end{aligned}$$

Из Линдберговог услова и кад $\varepsilon \to 0$ следи $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq j\leq k_n} \left| \frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2} \right| = 0$.

Тада постоји $n_0 = n_0(t)$, такав да за свако $n \geq n_0$ важи $\max\limits_{1\leq j\leq k_n} \left|\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$. На основу претходног је

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}} - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right)\right| &\leq \sum_{j=1}^{k_n}\frac{t^4\sigma_{nj}^4}{4}\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{2^{l-2}}\\ &= \frac{t^4}{4}\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^4.\end{aligned}$$

Како је $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leq j\leq k_n}\sigma_{nj}^2 = 0$, то

$$\left|\prod_{j=1}^{k_n} e^{-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}} - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1-\frac{t^2\sigma_{nj}^2}{2}\right)\right| \leq \frac{t^4}{4}\max_{1\leq j\leq k_n}\sigma_{nj}^2\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^2 \to 0, n\to\infty.$$

Узимајући све у обзир, добијамо

$$\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + o(1),$$

чиме је доказана једнакост (2).

$\Longrightarrow$ Доказујемо неопходност Линдеберговог услова. Претпоставимо да важе услови ЦТГ (2) и услов равномерне асимптотске занемарљивости (3). Ти услови су еквивалентни са

$$\begin{aligned}&(\forall t)\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},\\ &(\forall t)\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq k_n}|\varphi_{nj}(t)-1| = 0.\end{aligned}$$

Прва еквиваленција је јасна. У другом случају докажимо само да из услова равномерне занемарљивости следи тражена неједнакост (јер то нам треба):

$$\begin{aligned}|\varphi_{nj}(t)-1| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)dF_{nj}(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|e^{itx}-1|dF_{nj}(x)\\ &= \int_{|x|\leq\varepsilon}|e^{itx}-1|dF_{nj}(x) + \int_{|x|>\varepsilon}|e^{itx}-1|dF_{nj}(x)\\ &\leq |t|\int_{|x|\leq\varepsilon}|x|dF_{nj}(x) + \int_{|x|>\varepsilon}2dF_{nj}(x) \leq |t|\varepsilon + 2P\{|X_{nj}|>\varepsilon\}\\ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq k_n}|\varphi_{nj}(t)-1| &\leq \varepsilon|t| + 2\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq j\leq k_n}P\{|X_{nj}|>\varepsilon\}\end{aligned}$$

Пошто претходно важи за свако ε, када се пусти да $\varepsilon\to 0$ из услова равномерне асимптотске занемарљивости следи тврђење.

Нека је t фиксиран број. Из друге једнакости следи да постоји природан број $n_0 = n_0(t)$, такав да за свако $n \geq n_0$ важи неједнакост

$$\max_{1\leq j\leq k_n}|\varphi_{nj}(t)-1| \leq \frac{1}{2}.$$

Како је $\ln(1+z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$, то

$$
\begin{aligned}
|\ln \varphi_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t) + 1| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\varphi_{nj}(t) - 1)^k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\varphi_{nj}(t) - 1|^k}{k} \\
&= |\varphi_{nj}(t) - 1|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\varphi_{nj}(t) - 1|^{k-2}}{k} \\
&= \frac{|\varphi_{nj}(t) - 1|^2}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= |\varphi_{nj}(t) - 1|^2,
\end{aligned}
$$

па следи да је

$$
\ln \varphi_{nj}(t) = \varphi_{nj}(t) - 1 + c_{nj} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2,
$$

где је $|c_{nj}| \leq 1$.

Даље добијамо

$$
\sum_{j=1}^{k_n} \ln \varphi_{nj}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{nj}(t) - 1) + \sum_{j=1}^{k_n} c_{nj} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2.
$$

Одредимо граничну вредност, при $n \to \infty$, збирова из претходне једнакости. Из централне граничне теореме следи $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \varphi_{nj}(t) = -\frac{t^2}{2}$. Означимо са $M_n = \max\limits_{1 \leq j \leq k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1|$. Тада је

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1|^2 &\leq M_n \sum_{j=1}^{k_n} |\varphi_{nj}(t) - 1| \\
&= M_n \sum_{j=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nj}(x) \right| \\
&\leq M_n \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} - 1 - itx| dF_{nj}(x) \\
&\leq M_n \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{t^2 x^2}{2} \right| dF_{nj}(x) \\
&= M_n \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj}(x) \\
&= \frac{M_n t^2}{2} \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Према томе добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{k_n} (\varphi_{nj}(t) - 1) = -\frac{t^2}{2}$, одакле узимајући реални део добијамо

$$
\sum_{j=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos(tx)) dF_{nj}(x) = \frac{t^2}{2} + o(1), n \to \infty.
$$

Нека је $\varepsilon > 0$. Користећи претходну једнакост добијамо

$$\begin{aligned}
\left| \frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} (1-\cos(tx))dF_{nj}(x) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} (1-\cos(tx))dF_{nj}(x) \right| + o(1) \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k_n} P\left\{ |X_{nj}| \geq \varepsilon \right\} + o(1) \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{k_n} \frac{\sigma_{nj}^2}{\varepsilon^2} + o(1) = \frac{2}{\varepsilon^2} + o(1), n \to \infty.
\end{aligned}$$

Даље, узимајући у обзир да за свако x важи $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, добијамо

$$\begin{aligned}
0 &\leq 1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) \\
&= 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} \frac{t^2x^2}{2} dF_{nj}(x) \\
&\leq 1 - \frac{2}{t^2} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} (1 - cos(tx))dF_{nj}(x) \\
&= \frac{2}{t^2} \left(\frac{t^2}{2} - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} (1 - cos(tx))dF_{nj}(x) \right) \\
&\leq \frac{2}{t^2} \frac{2}{\varepsilon^2} + o(1) = \frac{4}{t^2\varepsilon^2} + o(1).
\end{aligned}$$

Користећи добијено следи

$$0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1 - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) \right) \leq \frac{4}{t^2\varepsilon^2}.$$

Како ово важи за свако t, то следи

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2 dF_{nj}(x) = 1,$$

која је због услова г) еквивалентна са Линдеберговим условом. □