Neparametarski testovi za dva nezavisna uzorka

- Boris Glišić 208/2010
- Bojana Ružičić 21/2010

Neparametarski testovi

- Hipoteze o raspodeli obeležja se nazivaju neparametarske hipoteze, a odgovarajući testovi su neparametarski testovi.

- Kada se ne može sigurnošću utvrditi da li je raspodela jedne grupe podataka normalna, izračunavanje pojedinih parametara i primena parametarskih metoda daju vrlo nepouzdane zaključke. U tim slučajevima se primenjuju neparametarske metode, koje ne zavise od raspodele posmatranog obeležja.

Neparametrski testovi

- Pored slučaja kada ne znamo raspodelu obeležja, neparametarske umesto parametarskih testova koristimo i u slučajevima:

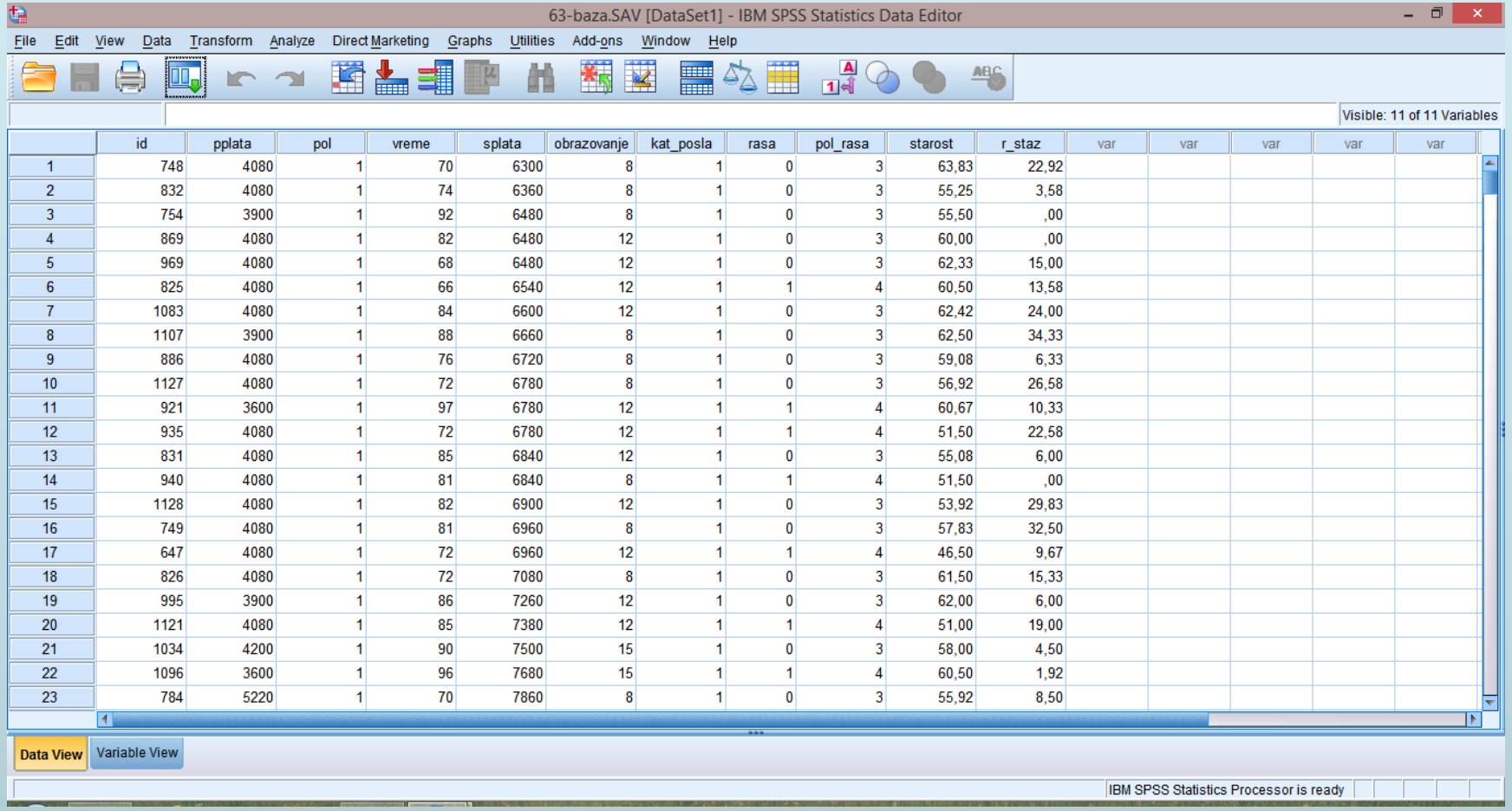
- 1. Kada je zavisna promenljiva u diskretnom obliku (na primer, skala od 5 nivoa – koliko se mušteriji dopada neki proizvod: od “ne, nimalo” do “da, veoma”)
- 2. Kada se nezavisna promenljiva sastoji od dve kategoričke, nezavisne grupe (pol muški – ženski, radni status zaposlen – nezaposlen)
- 3. Kada su opservacije međusobno zavisne

Testovi

- Testovi o kojima ćemo govoriti su efikasnije alternative za t – test.

- Mann – Whitney U test
- Wald – Wolfowitz Runs test
- Kolmogorov – Smirnov Z test
- Moses Extreme Reactions test

Baza


63-baza.SAV [DataSet1] - IBM SPSS Statistics Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help

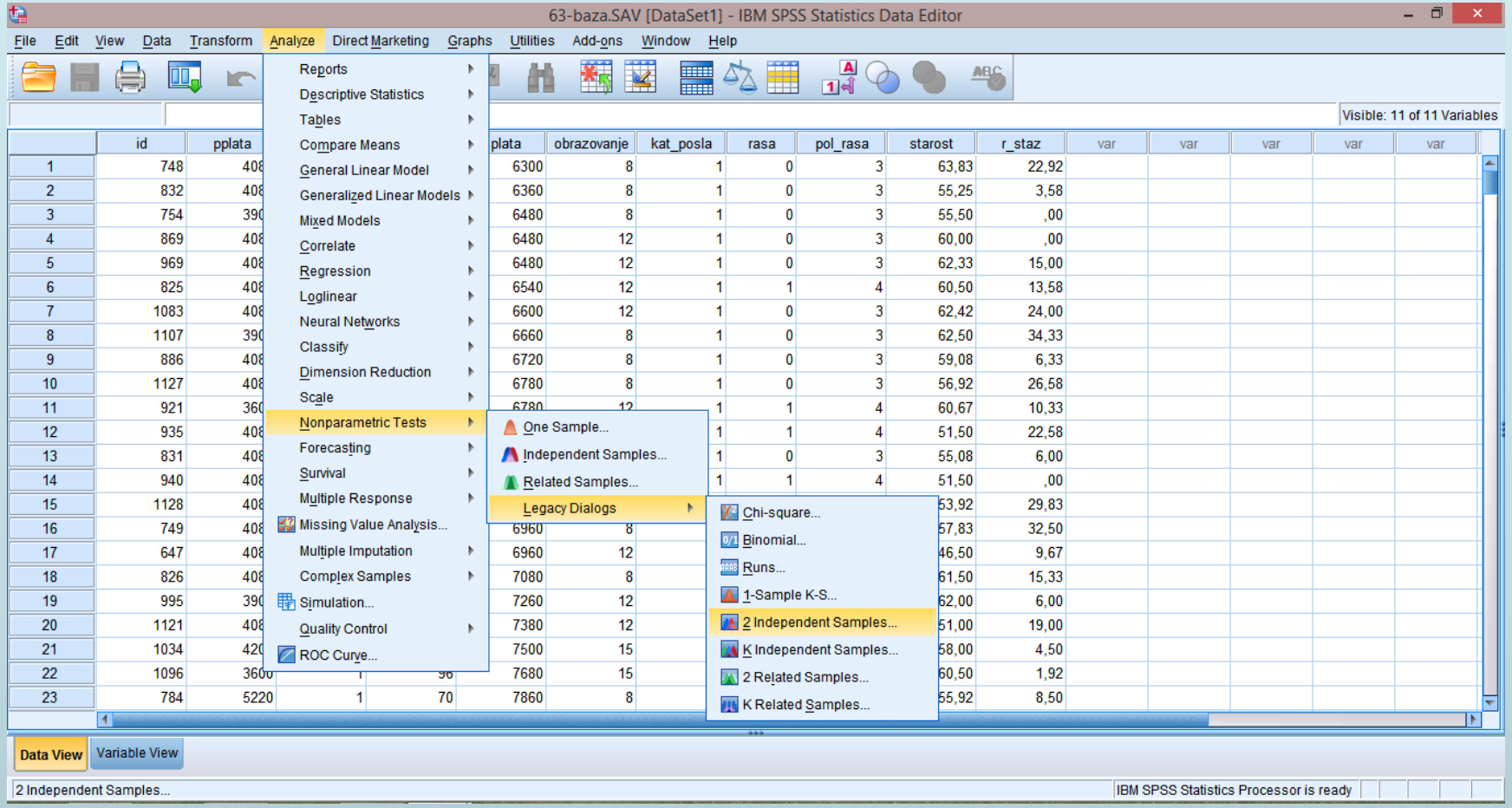
Visible: 11 of 11 Variables

	id	pplata	pol	vreme	splata	obrazovanje	kat_posla	rasa	pol_rasa	starost	r_staz	var	var	var	var	var
1	748	4080	1	70	6300	8	1	0	3	63,83	22,92					
2	832	4080	1	74	6360	8	1	0	3	55,25	3,58					
3	754	3900	1	92	6480	8	1	0	3	55,50	,00					
4	869	4080	1	82	6480	12	1	0	3	60,00	,00					
5	969	4080	1	68	6480	12	1	0	3	62,33	15,00					
6	825	4080	1	66	6540	12	1	1	4	60,50	13,58					
7	1083	4080	1	84	6600	12	1	0	3	62,42	24,00					
8	1107	3900	1	88	6660	8	1	0	3	62,50	34,33					
9	886	4080	1	76	6720	8	1	0	3	59,08	6,33					
10	1127	4080	1	72	6780	8	1	0	3	56,92	26,58					
11	921	3600	1	97	6780	12	1	1	4	60,67	10,33					
12	935	4080	1	72	6780	12	1	1	4	51,50	22,58					
13	831	4080	1	85	6840	12	1	0	3	55,08	6,00					
14	940	4080	1	81	6840	8	1	1	4	51,50	,00					
15	1128	4080	1	82	6900	12	1	0	3	53,92	29,83					
16	749	4080	1	81	6960	8	1	0	3	57,83	32,50					
17	647	4080	1	72	6960	12	1	1	4	46,50	9,67					
18	826	4080	1	72	7080	8	1	0	3	61,50	15,33					
19	995	3900	1	86	7260	12	1	0	3	62,00	6,00					
20	1121	4080	1	85	7380	12	1	1	4	51,00	19,00					
21	1034	4200	1	90	7500	15	1	0	3	58,00	4,50					
22	1096	3600	1	96	7680	15	1	1	4	60,50	1,92					
23	784	5220	1	70	7860	8	1	0	3	55,92	8,50					

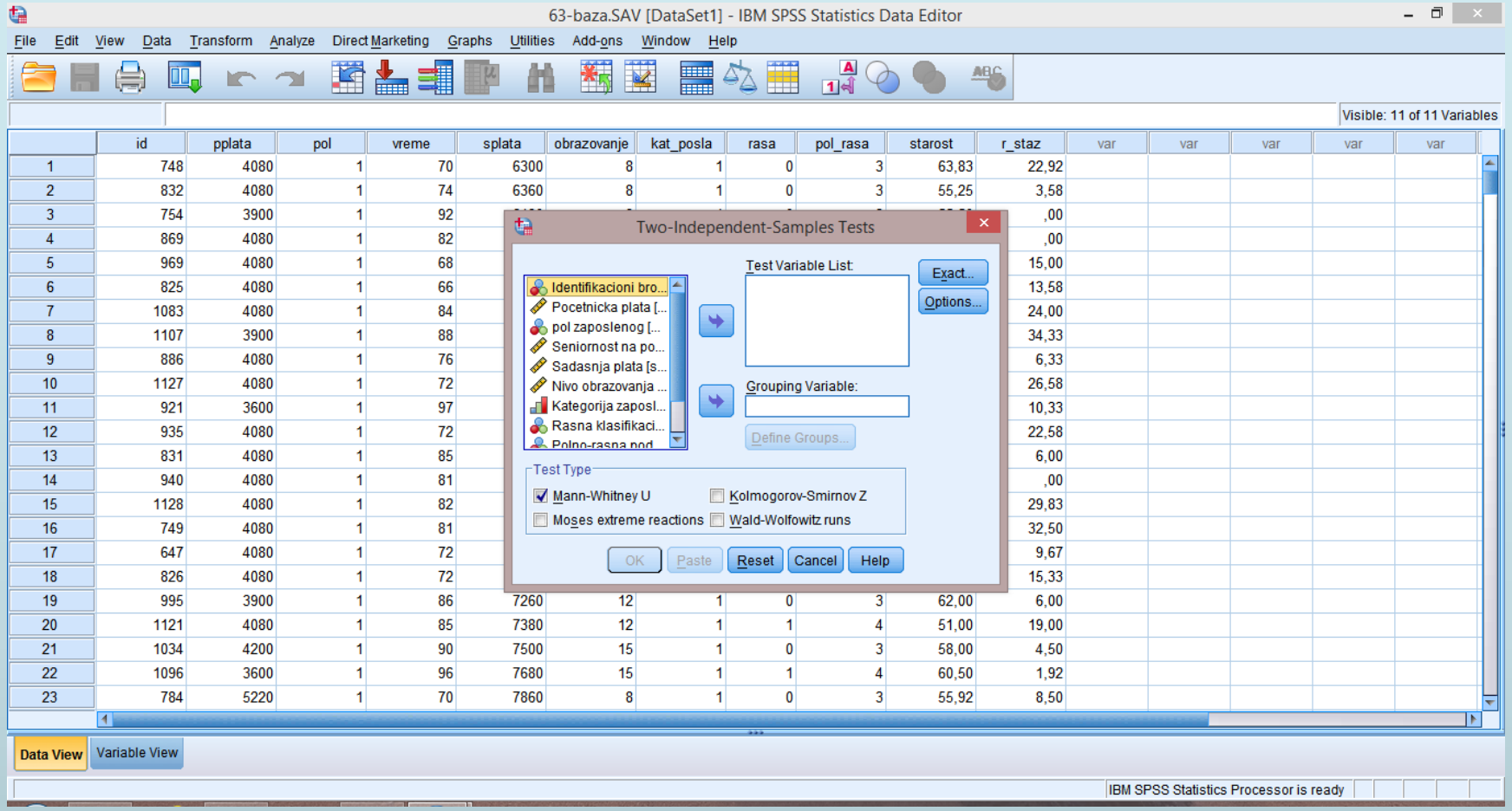
Data View Variable View

IBM SPSS Statistics Processor is ready

Pristupanje testovima



Pristupanje testovima



	id	pplata	pol	vreme	splata	obrazovanje	kat_posla	rasa	pol_rasa	starost	r_staz
1	748	4080	1	70	6300	8	1	0	3	63,83	22,92
2	832	4080	1	74	6360	8	1	0	3	55,25	3,58
3	754	3900	1	92							,00
4	869	4080	1	82							,00
5	969	4080	1	68							15,00
6	825	4080	1	66							13,58
7	1083	4080	1	84							24,00
8	1107	3900	1	88							34,33
9	886	4080	1	76							6,33
10	1127	4080	1	72							26,58
11	921	3600	1	97							10,33
12	935	4080	1	72							22,58
13	831	4080	1	85							6,00
14	940	4080	1	81							,00
15	1128	4080	1	82							29,83
16	749	4080	1	81							32,50
17	647	4080	1	72							9,67
18	826	4080	1	72							15,33
19	995	3900	1	86	7260	12	1	0	3	62,00	6,00
20	1121	4080	1	85	7380	12	1	1	4	51,00	19,00
21	1034	4200	1	90	7500	15	1	0	3	58,00	4,50
22	1096	3600	1	96	7680	15	1	1	4	60,50	1,92
23	784	5220	1	70	7860	8	1	0	3	55,92	8,50

Mann – Whitney U test

(Wilcoxon rank-sum (WRS))

- Ovaj test se primenjuje za testiranje hipoteze o jednakosti neprekidnih raspodela za obeležja X i Y na osnovu dva slučajna uzorka ($X_1, X_2, \ldots, X_m$) i ($Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$) pri čemu je $n \geq m$.
- Efikasniji je od t – testa (0.95) kod raspodela koje su različite od normalne i slične efikasnosti kod normalne raspodele.
- $H_o(F_X(x) = F_Y(x))$; $H_1(F_X(x) \neq F_Y(x))$
- Pri testiranju se formira objedinjeni uzorak sortiran u neopadajućem poretku. Definiše se

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & Y_j < X_i \\ 0, & Y_j \geq X_i \end{cases}$$

- Nulta hipoteza se testira uz pomoć statistike $U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}$.

Mann – Whitney U test

- Važi da je $E(U) = \frac{1}{2}mn, \qquad D(U) = \frac{1}{12}mn(m+n+1)$
- Raspodela statistike U se aproksimira normalnom raspodelom na sledeći način

$$Z = \frac{U - mn/2}{\sqrt{mn \cdot (m+n+1)}}\sqrt{12}$$

- Kritična oblast se određuje iz uslova $P\{Z \leq c_1\} = P\{Z \geq c_2\} = \frac{\alpha}{2}$
- Drugi način računanja statistike U je da se saberu svi rangovi elemenata X i svi rangovi elemenata Y. Tada se vrednost test – statistike računa na osnovu jedne od ove dve formule:

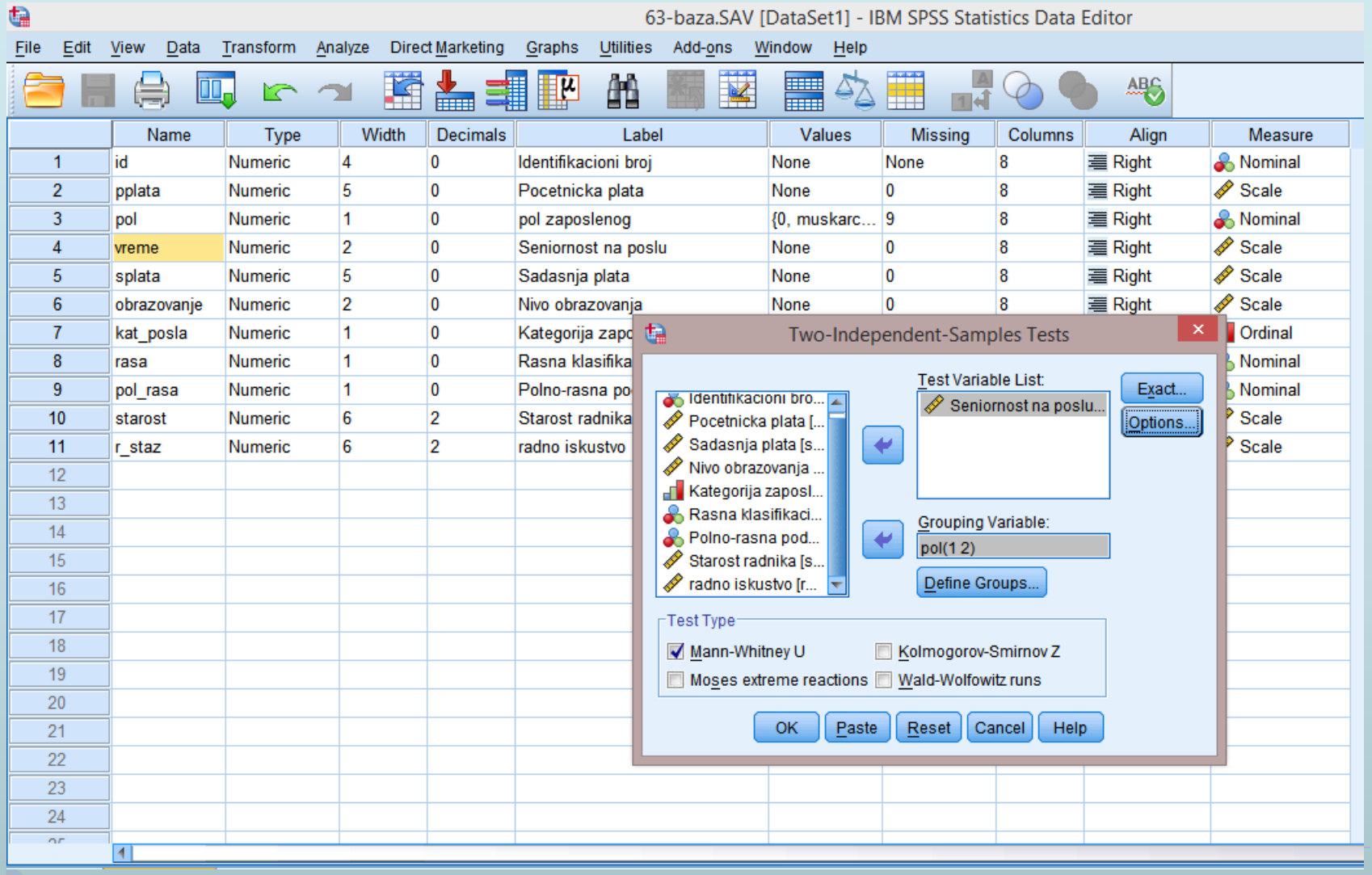
$$U = R_X - \frac{m(m+1)}{2} \qquad U = -R_Y + mn + \frac{n(n+1)}{2}$$

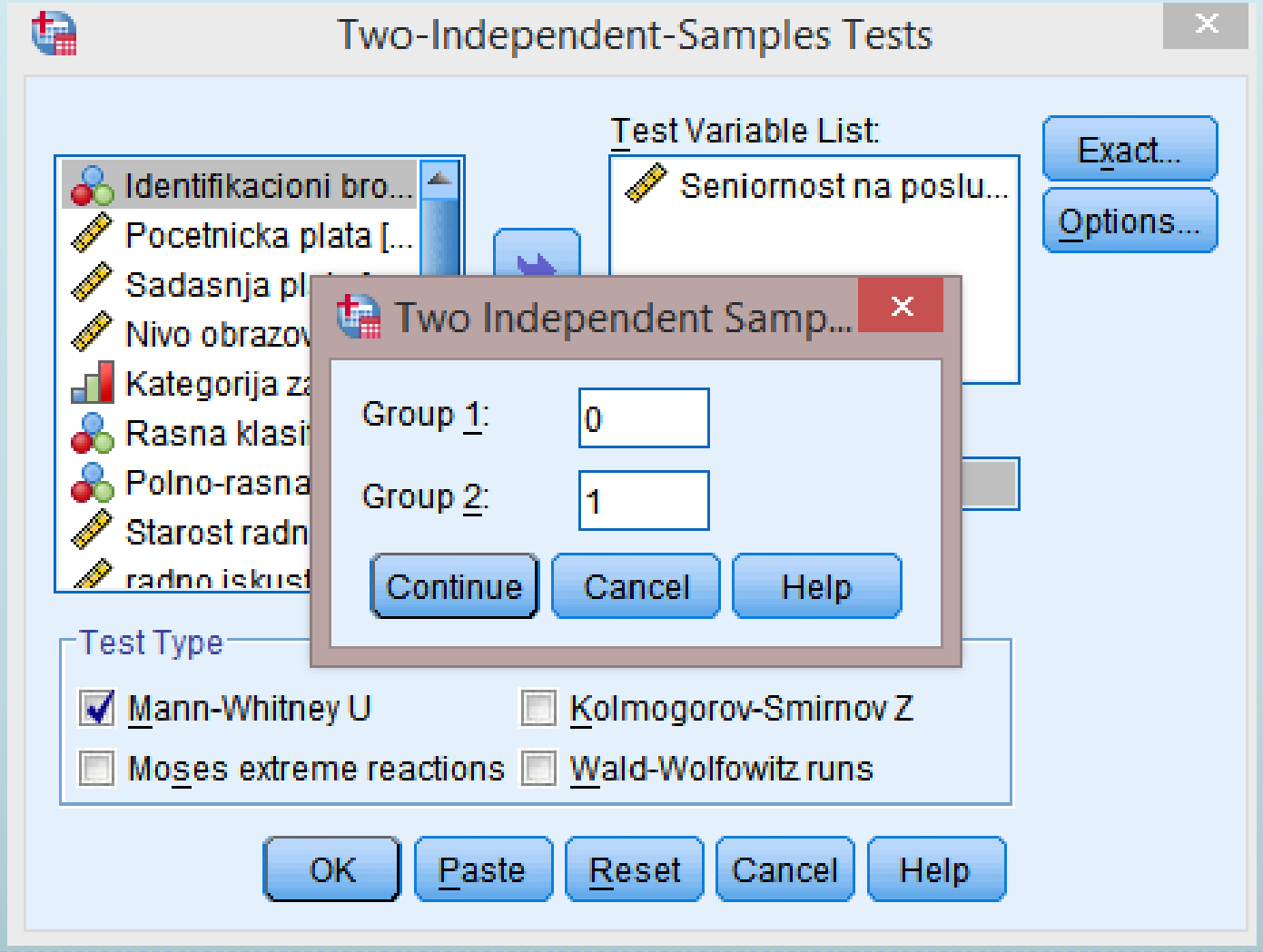
- Aproksimacija normalnom raspodelom je dobra već za m,n ≥ 8. Ako su obimi uzoraka manji od 8, koriste se posebne tablice.

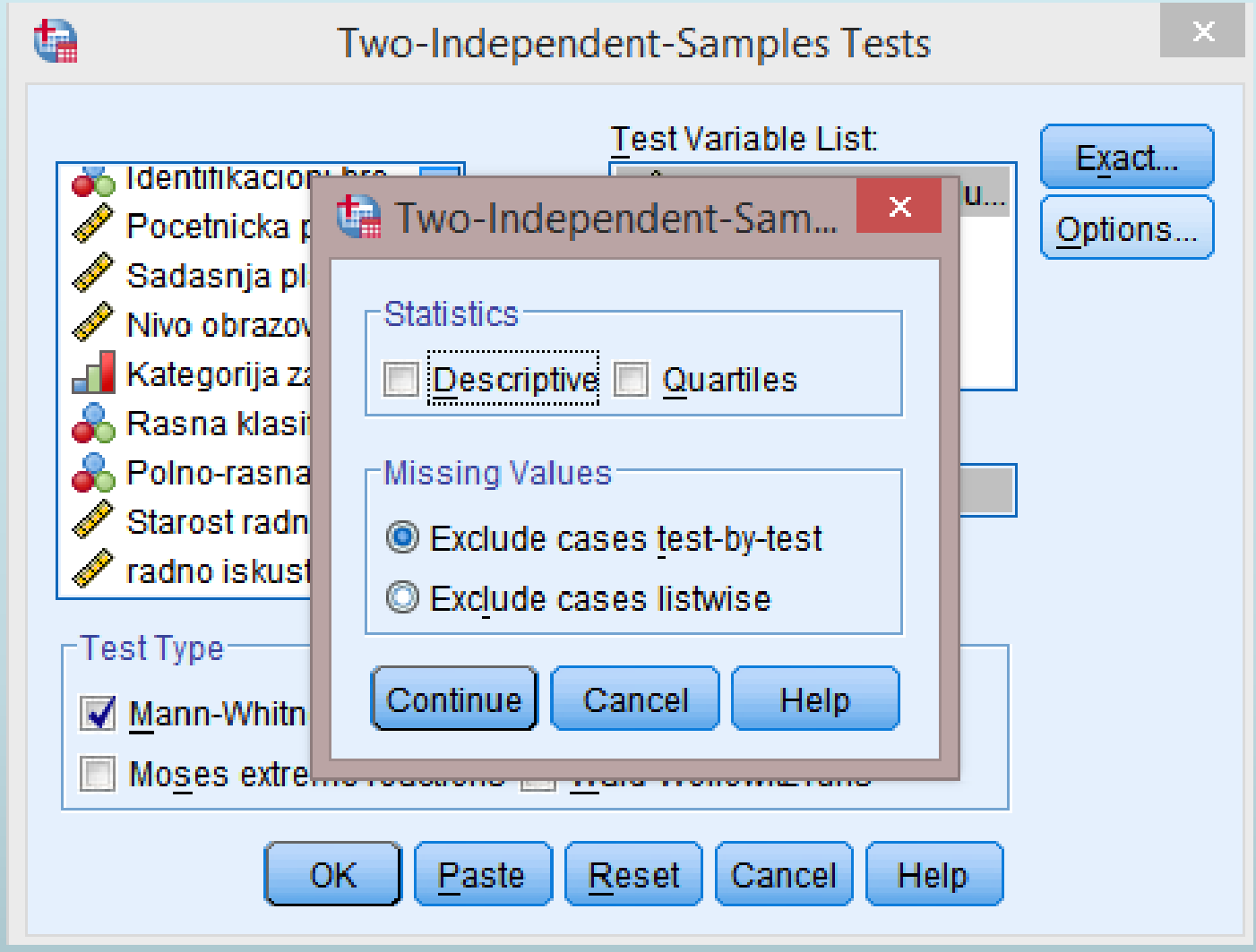
Primer

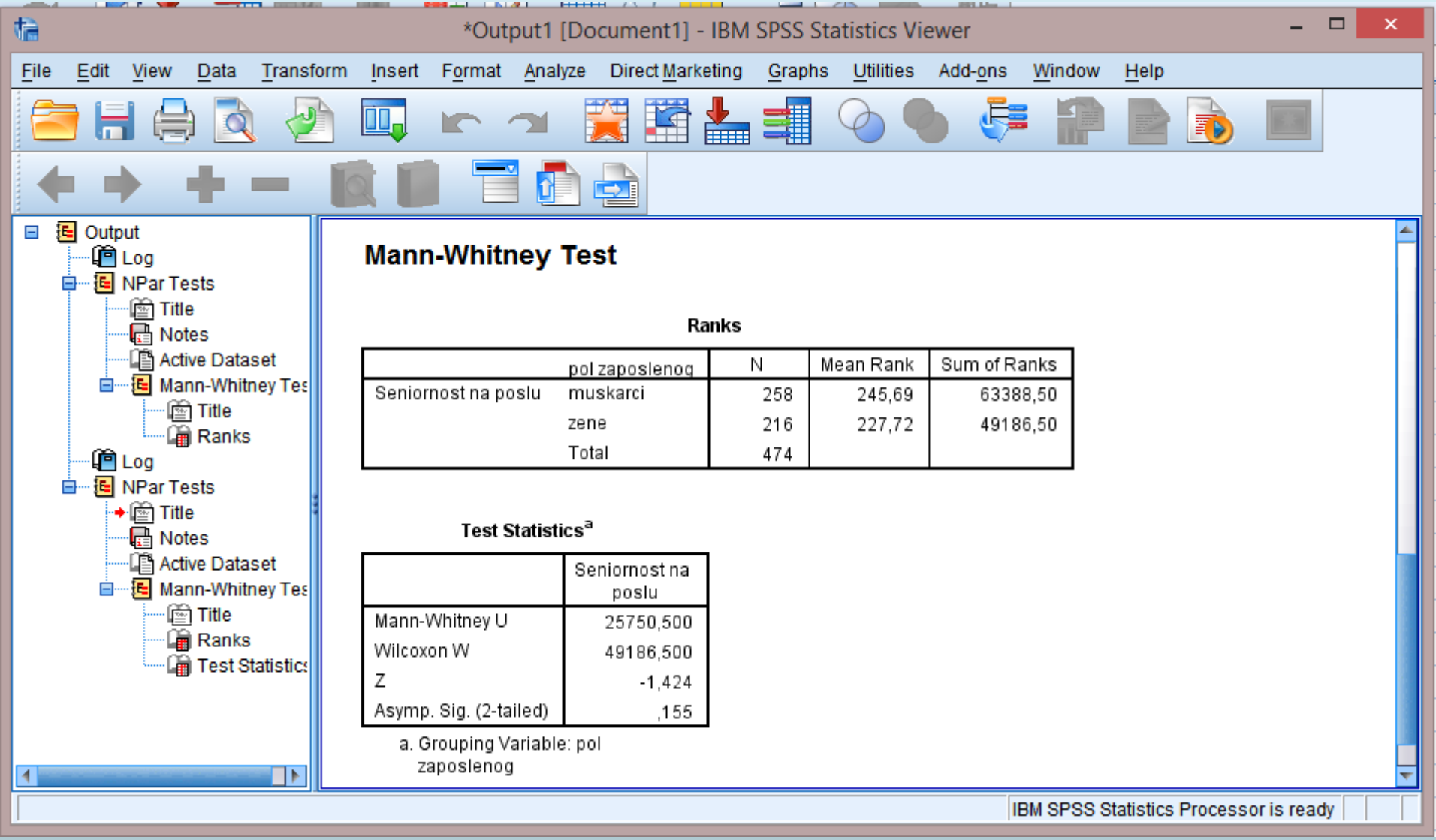
- Na osnovu baze sa početka ispitujemo:
- Da li dužina rada zavisi od pola zaposlenih?

- Zavisna promenljiva: Seniornost na poslu
- Nezavisna: Pol zaposlenog


63-baza.SAV [DataSet1] - IBM SPSS Statistics Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help
Name Type Width Decimals Label Values Missing Columns Align Measure
1 id Numeric 4 0 Identifikacioni broj None None 8 Right Nominal
2 pplata Numeric 5 0 Pocetnicka plata None 0 8 Right Scale
3 pol Numeric 1 0 pol zaposlenog {0, muskarc... 9 8 Right Nominal
4 vreme Numeric 2 0 Seniornost na poslu None 0 8 Right Scale
5 splata Numeric 5 0 Sadasnja plata None 0 8 Right Scale
6 obrazovanje Numeric 2 0 Nivo obrazovanja None 0 8 Right Scale
7 kat_posla Numeric 1 0 Kategorija zapo Ordinal
8 rasa Numeric 1 0 Rasna klasifika Nominal
9 pol_rasa Numeric 1 0 Polno-rasna po Nominal
10 starost Numeric 6 2 Starost radnika Scale
11 r_staz Numeric 6 2 radno iskustvo Scale
Two-Independent-Samples Tests
Identifikacioni bro...
Pocetnicka plata [...
Sadasnja plata [s...
Nivo obrazovanja ...
Kategorija zaposl...
Rasna klasifikaci...
Polno-rasna pod...
Starost radnika [s...
radno iskustvo [r...
Test Variable List:
Seniornost na poslu...
Exact...
Options...
Grouping Variable:
pol(1 2)
Define Groups...
Test Type
Mann-Whitney U
Kolmogorov-Smirnov Z
Moses extreme reactions
Wald-Wolfowitz runs
OK Paste Reset Cancel Help


Two-Independent-Samples Tests
Test Variable List:
Seniornost na poslu...
Exact...
Options...
Identifikacioni bro...
Pocetnicka plata [...
Sadasnja pl
Nivo obrazov
Kategorija za
Rasna klasi
Polno-rasna
Starost radn
radno iskust
Two Independent Samp...
Group 1:
0
Group 2:
1
Continue
Cancel
Help
Test Type
Mann-Whitney U
Kolmogorov-Smirnov Z
Moses extreme reactions
Wald-Wolfowitz runs
OK
Paste
Reset
Cancel
Help


Two-Independent-Samples Tests
Test Variable List:
Exact...
Options...
Pocetnicka p
Sadasnja pl
Nivo obrazov
Kategorija za
Rasna klasi
Polno-rasna
Starost radn
radno iskust
Test Type
Mann-Whitn
Moses extre
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Two-Independent-Sam...
Statistics
Descriptive
Quartiles
Missing Values
Exclude cases test-by-test
Exclude cases listwise
Continue
Cancel
Help


*Output1 [Document1] - IBM SPSS Statistics Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help
Output
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Mann-Whitney Tes
Title
Ranks
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Mann-Whitney Tes
Title
Ranks
Test Statistics
Mann-Whitney Test
Ranks
pol zaposlenog N Mean Rank Sum of Ranks
Seniornost na poslu muskarci 258 245,69 63388,50
zene 216 227,72 49186,50
Total 474
Test Statistics[a]
Seniornost na poslu
Mann-Whitney U 25750,500
Wilcoxon W 49186,500
Z -1,424
Asymp. Sig. (2-tailed) ,155
a. Grouping Variable: pol zaposlenog
IBM SPSS Statistics Processor is ready

Test

- $H_0(F_X(x) = F_Y(x))$
- $H_1(F_X(x) \neq F_Y(x))$

- Test – statistika Z = -1.424
- P – vrednost testa p = 0.155

- Zaključak: Prihvatamo nultu hipotezu.

Wald – Wolfowitz Run test

- Ili: Test koraka
- H_0: $F_1(x)=F_2(x)$ Ne postoji značajna razlika između funkcija raspodele. Drugim rečima, populacije iz kojih su uzorci izdvojeni su identičnih raspodela.
- H_1: $F_1(x)\neq F_2(x)$ Postoji značajna razlika između ovih raspodela.
- Vrednosti su rangirane u rastućem poretku, svaka vrednost je kodirana sa 1 ili 2 i ukupan broj runs-a (koraka) se sumira i koristi kao test statistika - R. Runs oznacava broj promena u grupi koju posmatramo, tačnije pod jednim korakom podrazumevamo niz elemenata iste kategorije proizvoljne dužine.
- Male vrednosti govore o tome da se populacije razlikuju, a velike ukazuju na to da se radi o identičnim populacijama u smislu raspodele.

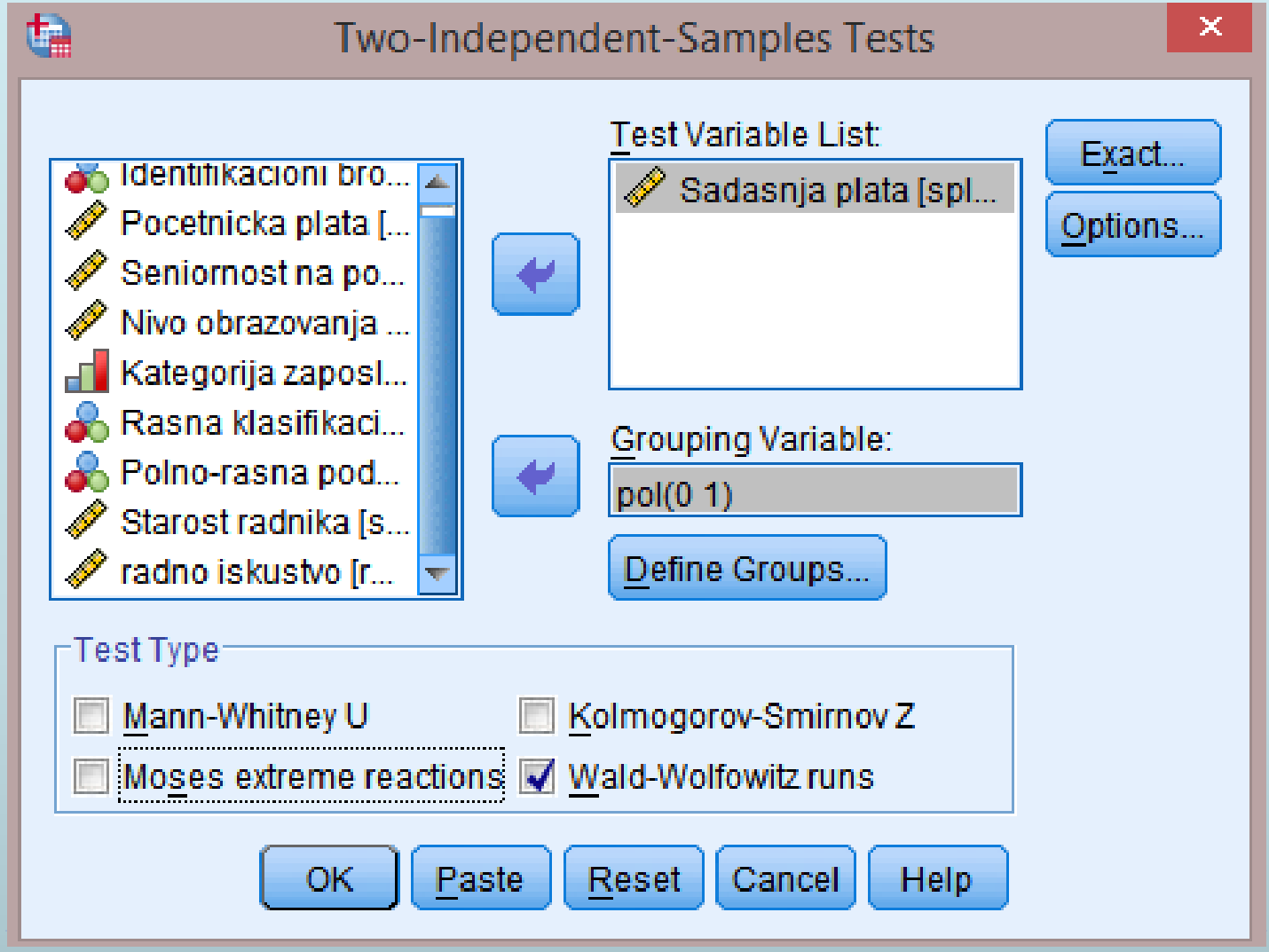
Wald – Wolfowitz Run test

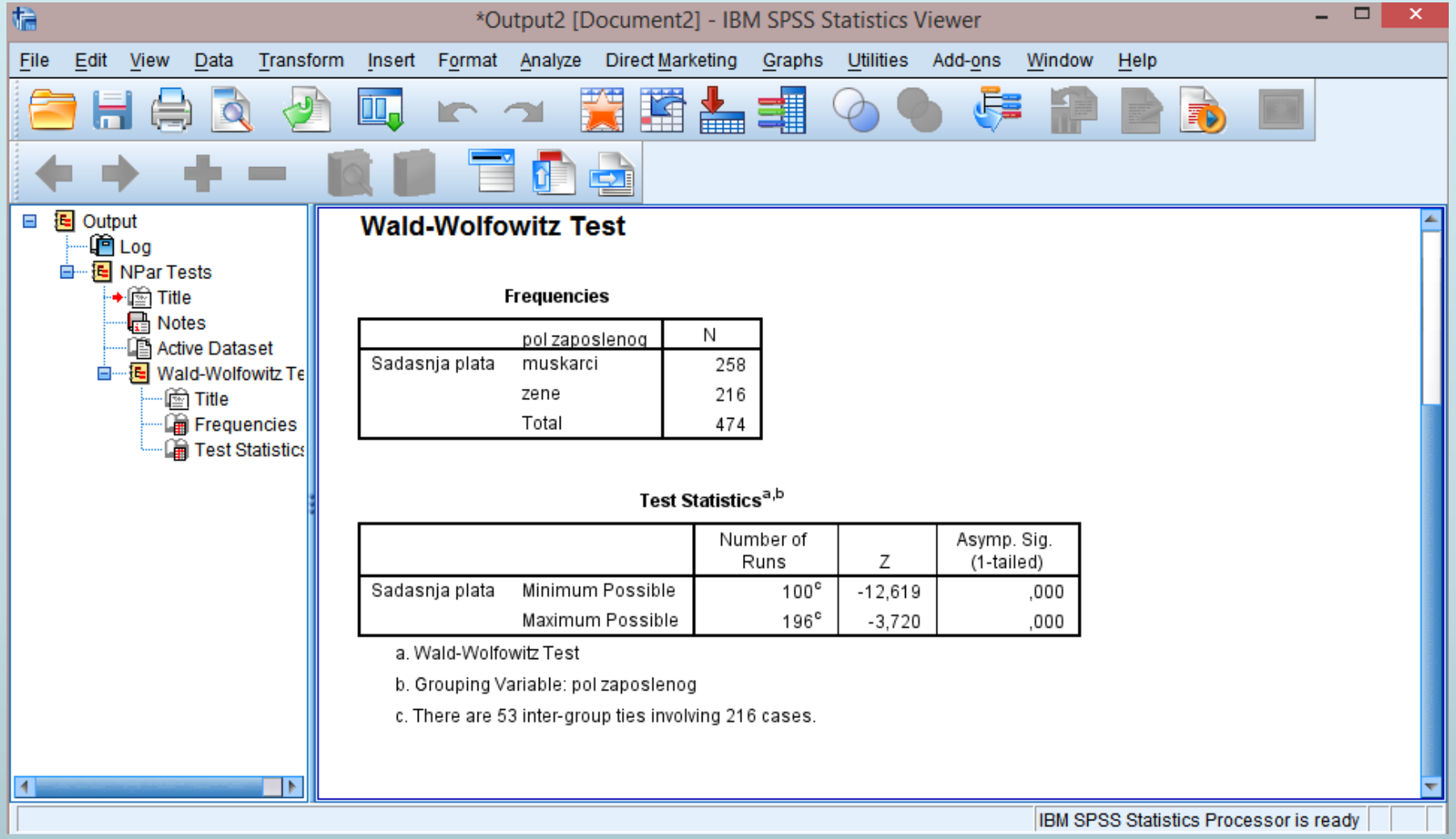
- Raspodelu test – statistike R i u ovom slučaju aproksimiramo normalnom raspodelom. I to na sledeći način:
- Ako je m+n ≥ 50
- $Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$, gde su $\mu_R = \frac{2mn}{m+n} + 1$ i $\sigma_R = \sqrt{\frac{2mn(2mn-m-n)}{(m+n)^2(m+n+1)}}$
- Inače $Z_c = \begin{cases} (R - \mu_R + 0.5)/\sigma_R, & |R - \mu_R| \geq 0.5 \\ 0, & |R - \mu_R| < 0.5 \end{cases}$
- P-vrednost se računa kao $p_1 = P\{Z \leq z\} = \Phi(z)$.
- Ili, ako je m+n ≤ 30 : $p_1 = P\{r \leq R\} = \sum_{r=2}^{K} f_R(r)$ gde je $f_R(r) = \frac{2\binom{m-1}{\frac{r}{2}-1}\binom{n-1}{\frac{r}{2}-1}}{\binom{m+n}{m}}$
- U oba slučaja važi da ako je $p_1 < \alpha$ odbacujemo nultu hipotezu.

Primer

- Na osnovu baze sa početka ispitujemo:
- Da li plata zavisi od pola zaposlenih?

- Zavisna promenljiva: Sadašnja plata
- Nezavisna: Pol zaposlenog


Two-Independent-Samples Tests
Identifikacioni bro...
Pocetnicka plata [...
Seniornost na po...
Nivo obrazovanja ...
Kategorija zaposl...
Rasna klasifikaci...
Polno-rasna pod...
Starost radnika [s...
radno iskustvo [r...
Test Variable List:
Sadasnja plata [spl...
Exact...
Options...
Grouping Variable:
pol(0 1)
Define Groups...
Test Type
Mann-Whitney U
Kolmogorov-Smirnov Z
Moses extreme reactions
Wald-Wolfowitz runs
OK
Paste
Reset
Cancel
Help


*Output2 [Document2] - IBM SPSS Statistics Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help
Output
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Wald-Wolfowitz Te
Title
Frequencies
Test Statistics
Wald-Wolfowitz Test
Frequencies
pol zaposlenog N
Sadasnja plata muskarci 258
zene 216
Total 474
Test Statistics[a,b]
Number of Runs Z Asymp. Sig. (1-tailed)
Sadasnja plata Minimum Possible 100[c] -12,619 ,000
Maximum Possible 196[c] -3,720 ,000
a. Wald-Wolfowitz Test
b. Grouping Variable: pol zaposlenog
c. There are 53 inter-group ties involving 216 cases.
IBM SPSS Statistics Processor is ready

Test

- $H_o(F_X(x) = F_Y(x))$
- $H_1(F_X(x) \neq F_Y(x))$

- Test – statistika $-12.619 \leq Z \leq -3.720$
- P – vrednost testa $p = 0$

- Zaključak: Odbacujemo nultu hipotezu.

Kolmogorov – Smirnov test

- Elementi oba uzorka se sortiraju u rastućem poretku.
- Računamo empirijske funkcije raspodele oba uzorka.
- Za svako xj računamo razliku između uzoraka :

$$m \geq n \quad d_j = \bar{F}_1(x_j) - \bar{F}_2(x_j)$$

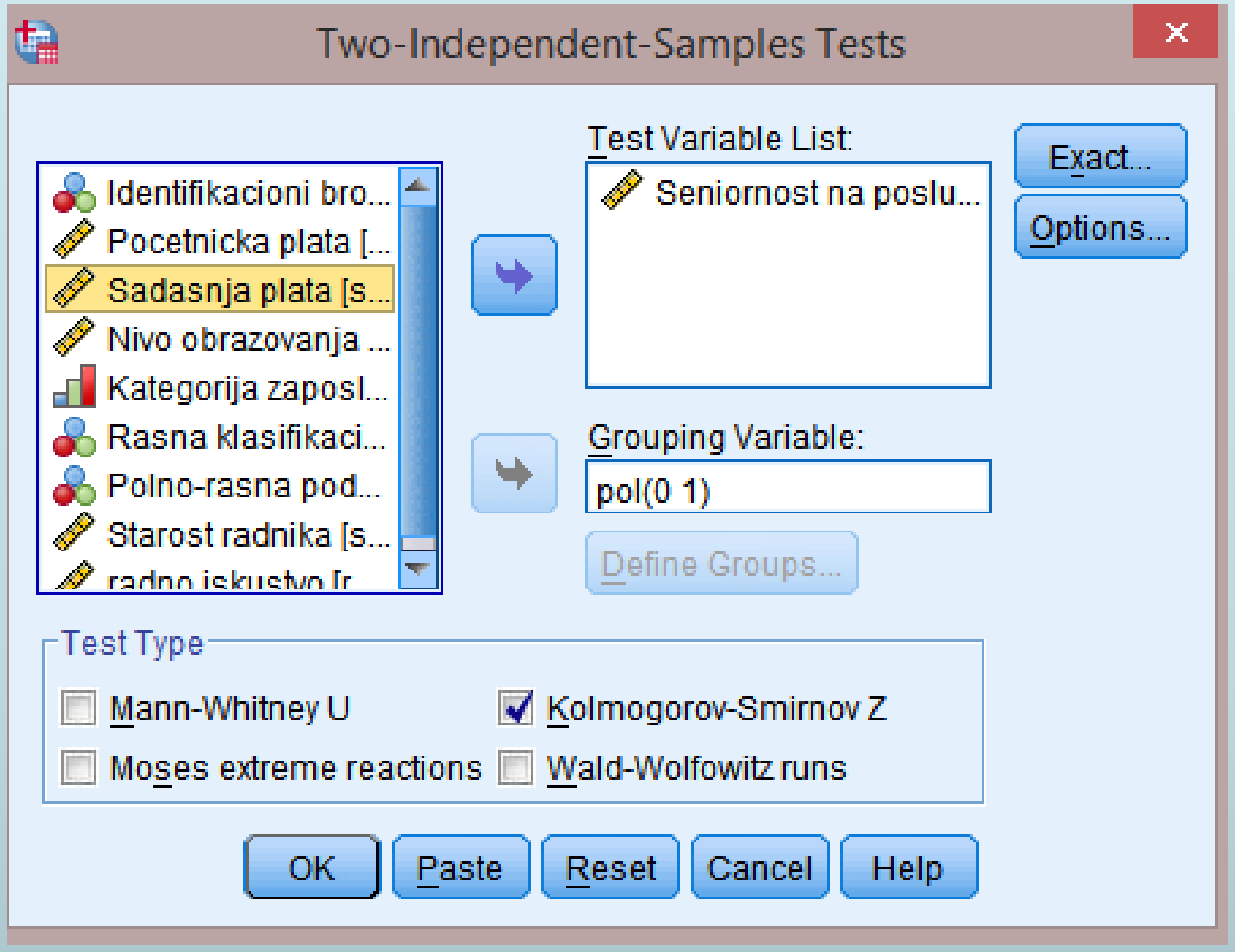
$$n \geq m \quad d_j = \bar{F}_2(x_j) - \bar{F}_1(x_j)$$

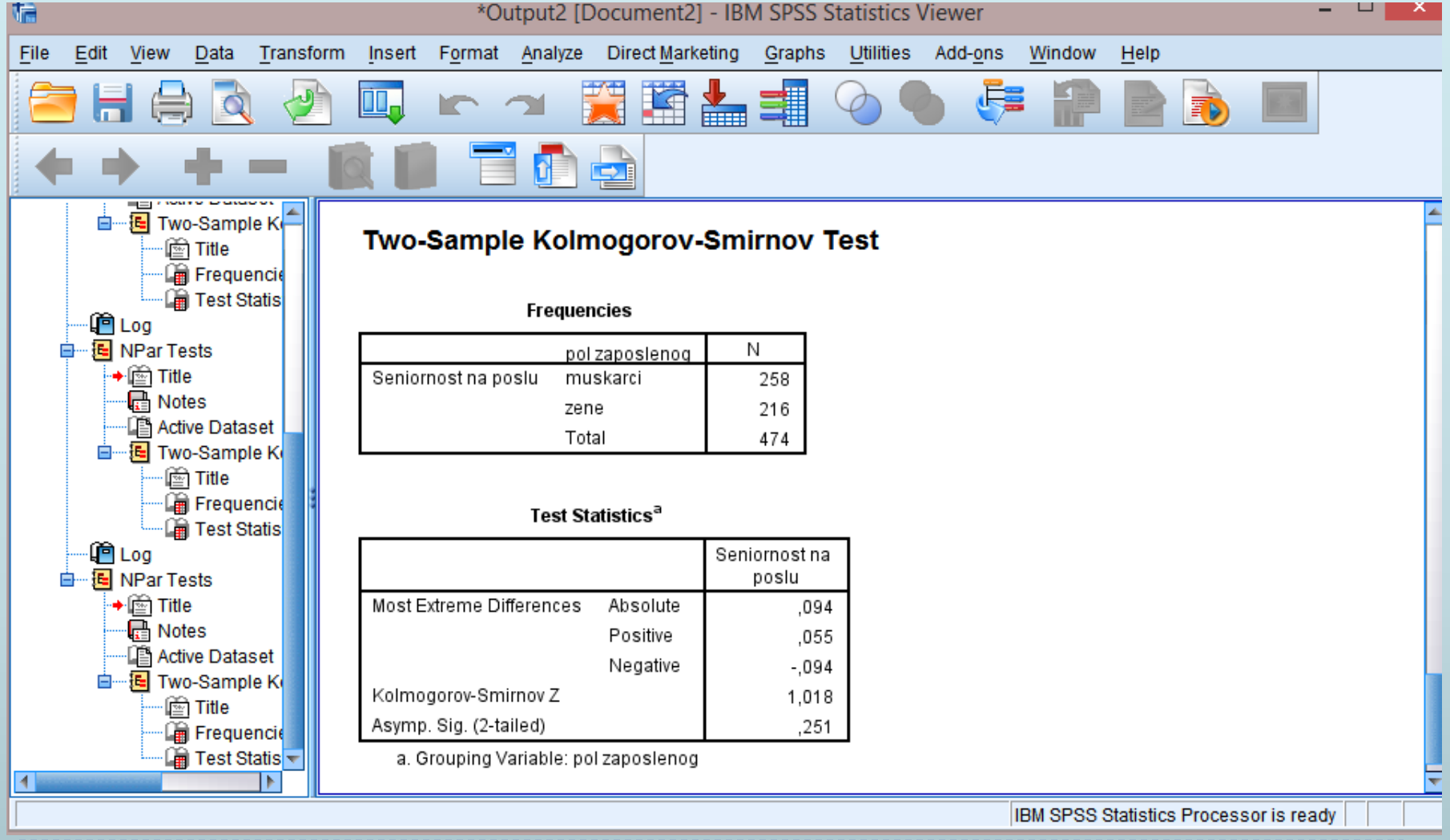
- Test statistika : $Z = \max_j |d_j|$.

Primer

- Koristimo isti primer kao kod Mann-Whitney U testa.
- Dakle, pitanje je:
- Da li dužina rada zavisi od pola zaposlenih?

- Zavisna promenljiva: Seniornost na poslu
- Nezavisna: Pol zaposlenog


Two-Independent-Samples Tests
Identifikacioni bro...
Pocetnicka plata [...
Sadasnja plata [s...
Nivo obrazovanja ...
Kategorija zaposl...
Rasna klasifikaci...
Polno-rasna pod...
Starost radnika [s...
Test Variable List:
Seniornost na poslu...
Grouping Variable:
pol(0 1)
Define Groups...
Exact...
Options...
Test Type
Mann-Whitney U
Kolmogorov-Smirnov Z
Moses extreme reactions
Wald-Wolfowitz runs
OK
Paste
Reset
Cancel
Help


*Output2 [Document2] - IBM SPSS Statistics Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help
Two-Sample K
Title
Frequencie
Test Statis
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Two-Sample K
Title
Frequencie
Test Statis
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Two-Sample K
Title
Frequencie
Test Statis
Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test
Frequencies
pol zaposlenog N
Seniornost na poslu muskarci 258
zene 216
Total 474
Test Statistics[a]
Seniornost na poslu
Most Extreme Differences Absolute ,094
Positive ,055
Negative -,094
Kolmogorov-Smirnov Z 1,018
Asymp. Sig. (2-tailed) ,251
a. Grouping Variable: pol zaposlenog
IBM SPSS Statistics Processor is ready

Test

- $H_o(F_X(x) = F_Y(x))$
- $H_1(F_X(x) \neq F_Y(x))$

- Test – statistika Z = 1.018
- P – vrednost testa p = 0.251

- Zaključak: Prihvatamo nultu hipotezu.

Moses Extreme Reactions test

- Moses – ovim testom se testiraju dva nezavisna uzorka sa neprekidnom raspodelom.
- Nulta hipoteza: Verovatnoće da svaka od populacija sadrži ekstremne vrednosti su jednake.
- Alternativna hipoteza: Veća je verovatnoća da se ekstremne vrednosti nađu u populaciji iz koje je izdvojen uzorak većeg obima.

- SPAN (raspon) :
- Vrednosti iz oba uzorka se spoje, sortiraju i rangiraju. Vrednost najmanjeg ranga određuje kontrolni uzorak.
- SPAN = najveći rang – najmanji rang (kontrolnog uzorka) + 1.

Moses Extreme Reactions test

- Ako SPAN nije ceo broj, zaokružuje se na najbliži ceo broj.

- Neka m i n predstavljaju ukupan broj članova kontrolnog i eksperimentalnog uzorka, uključujući frekvencije, i

  g = SPAN - m + 2h, h je ceo broj jednak 0.05m ili 1 u zavisnosti od toga koji je broj veći.
- Onda je verovatnoca raspona s jednaka:

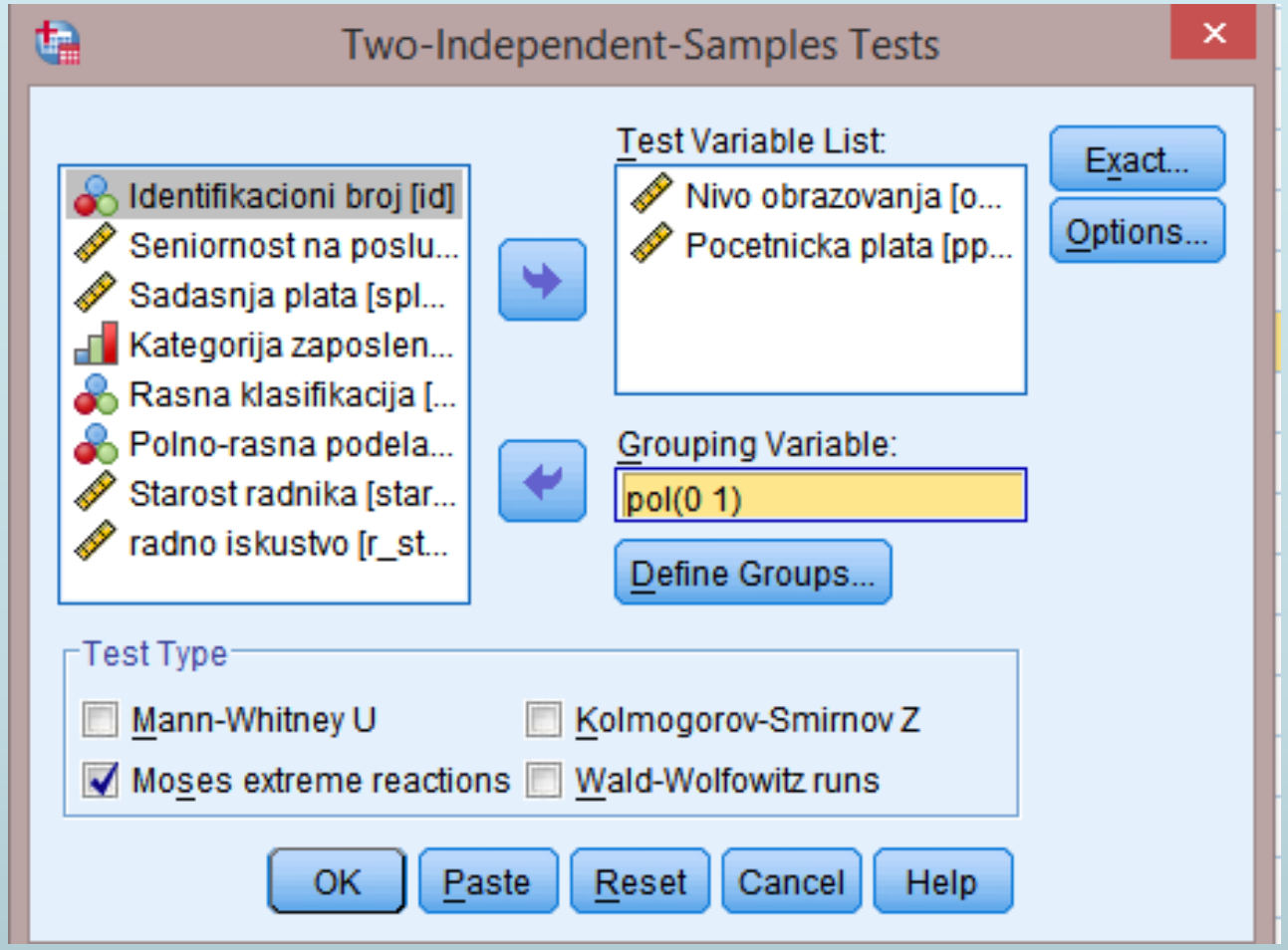
$$p_1 = P\{s \leq SPAN\} = \frac{\sum_{i=0}^{g}\left[\binom{i+m-2h-2}{i}\binom{n+2h+1-i}{n-i}\right]}{\binom{m+n}{m}}$$

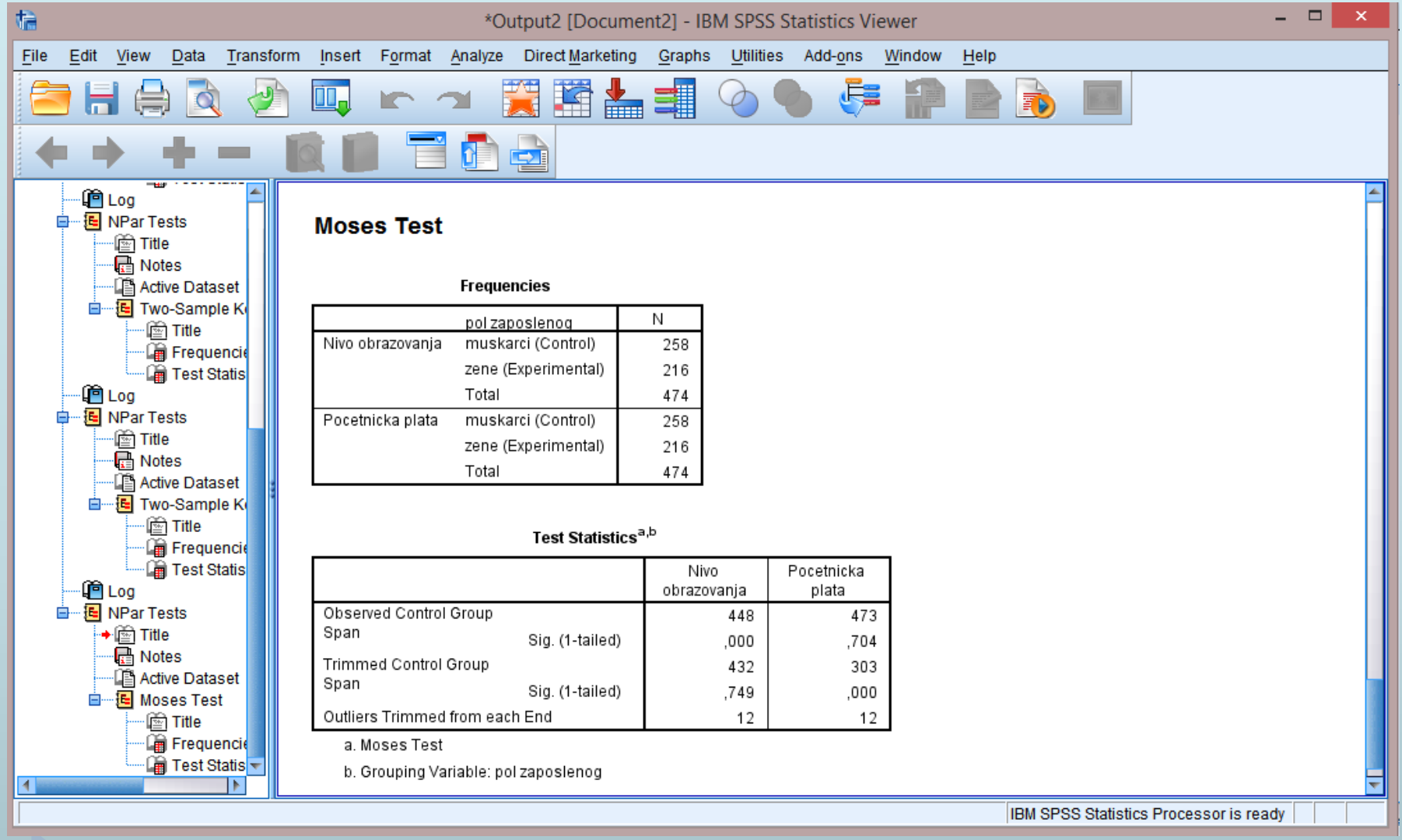
- Ukoliko je $p_1 \leq \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu.

Primer

- U ovom primeru ćemo testirati dve zavisne promenljive: Nivo obrazovanja i Početnička plata.

- Nezavisna promenljiva je, kao i do sada, Pol zaposlenih.


Two-Independent-Samples Tests
Identifikacioni broj [id]
Seniornost na poslu...
Sadasnja plata [spl...
Kategorija zaposlen...
Rasna klasifikacija [...
Polno-rasna podela...
Starost radnika [star...
radno iskustvo [r_st...
Test Variable List:
Nivo obrazovanja [o...
Pocetnicka plata [pp...
Exact...
Options...
Grouping Variable:
pol(0 1)
Define Groups...
Test Type
Mann-Whitney U
Kolmogorov-Smirnov Z
Moses extreme reactions
Wald-Wolfowitz runs
OK
Paste
Reset
Cancel
Help


*Output2 [Document2] - IBM SPSS Statistics Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window Help
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Two-Sample K
Title
Frequencie
Test Statis
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Two-Sample K
Title
Frequencie
Test Statis
Log
NPar Tests
Title
Notes
Active Dataset
Moses Test
Title
Frequencie
Test Statis
Moses Test
Frequencies
pol zaposlenog N
Nivo obrazovanja muskarci (Control) 258
zene (Experimental) 216
Total 474
Pocetnicka plata muskarci (Control) 258
zene (Experimental) 216
Total 474
Test Statistics[a,b]
Nivo obrazovanja
Pocetnicka plata
Observed Control Group Span 448 473
Sig. (1-tailed) ,000 ,704
Trimmed Control Group Span 432 303
Sig. (1-tailed) ,749 ,000
Outliers Trimmed from each End 12 12
a. Moses Test
b. Grouping Variable: pol zaposlenog
IBM SPSS Statistics Processor is ready

Test

- Nivo obrazovanja:
- Test – statistika SPAN = 448
- P – vrednost testa p = 0
- Zaključak: Odbacujemo nultu hipotezu.

- Početnička plata:
- Test – statistika SPAN = 473
- P – vrednost testa p = 0.704
- Zaključak: Prihvatamo nultu hipotezu.