

1. Нека је $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ прост случајни узорак из транслиране експоненцијалне расподеле с густином $f(x; \theta) = e^{\theta-x}$, $x \geq \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Наћи довољну статистику параметра θ и доказати да је комплетна.
- Показати да су статистика добијена под а) и узорачки распон $X_{(n)} - X_{(1)}$ независне статистике.
- Израчунати $\text{cov}(X_{(1)}, X_{(n)})$.

2. Нека је $\hat{\theta}$ оцена максималне веродостојности параметра θ и нека је $\tau(\theta)$ било која функција параметра θ .

- Доказати да је $\hat{\eta} = \tau(\hat{\theta})$ оцена максималне веродостојности параметра $\eta = \tau(\theta)$.
- Наћи оцену максималне веродостојности релативне дисперзије $\delta = \frac{DX}{EX}$ у случају да је дат прост случајни узорак из гама расподеле с густином $f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta x}$, $x > 0$, $\alpha, \beta > 0$.

3. Нека је \mathbf{X} узорак из експоненцијалне $\mathcal{E}(\theta)$, $\theta > 0$, расподеле и нека је априорна расподела параметра θ неправа расподела $\pi(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $\theta > 0$.

- На основу узорка обима 10 у коме је $\sum x_i = 8$ наћи Бајесов интервал прекривања (a, b) нивоа $1 - \alpha$, такав да важи $P\{\theta < a\} = P\{\theta > b\} = \frac{\alpha}{2}$.
- Дефинисати област прекривања највеће апостериорне густине (НАГ). Доказати да интервал добијен под а) није НАГ.

4. Особа се не осећа добро и иде код лекара. Могуће су две дијагнозе: прехлада (θ_1) и бактеријска инфекција (θ_2). Лекар има две могућности: да предложи пацијенту да пије чај или да препише антибиотике. Таблица губитака је:

$L(a, \theta)$	прехлада	инфекција
чај	0	10
антибиотик	1	0

Пре доношења одлуке лекар ради анализу крви пацијенту, која показује да ли је инфекција или није. Међутим, тестирањем крви може се направити грешка. Претпоставља се да важи следеће

$P(X \theta_j)$	прехлада	инфекција
јесте инфекција	0.2	0.7
није инфекција	0.8	0.3

- Одредити оптималну минимаксну функцију одлучивања.
- Ако је априорна расподела $\pi(\theta_1) = 0.9$, $\pi(\theta_2) = 0.1$, одредити оптималну одлуку по Бајесовом принципу ако јесте у питању инфекција.