МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА - Писмени испит **2. јул 2017.**

др Марко Обрадовић, Марија Цупарић, Аница Костић

1. Нека је $\mathbf{X}$ узорак с узорачком расподелом $\mathbb{P}(\boldsymbol{x};\theta)$ која задовољава услове регуларности Рао-Крамера и нека је

$$U_\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\mathbb{P}(\boldsymbol{x};\theta).$$

а) Приликом доказа теореме Рао-Крамера види се да дисперзија непристрасне оцене $T(\mathbf{X})$ неког параметра $g(\theta)$ достиже границу Рао-Крамера ако и само ако је $\mathrm{Cov}_\theta^2(T(\mathbf{X}),U_\theta(\mathbf{X})) = DT(\mathbf{X})D_\theta U_\theta(\mathbf{X})$. Одредити $\mathbb{P}(\boldsymbol{x};\theta)$ тако да дисперзија оцене $T(\mathbf{X})$ достиже границу Рао-Крамера.

б) Нека $\mathbf{X}$ има фамилију степених расподела с густином $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $x\in[0,1]$, $\theta>0$. Одредити функцију $g(\theta)$ такву да постоји њена непристрасна оцена која достиже границу Рао-Крамера и наћи ту оцену.

2. Нека је $\mathbf{X}$ узорак из фамилије расподела која има закон расподеле $f(x) = p(1-p)^x$, $x = 0,1,\ldots$, и нека је априорна расподела параметра p униформна на интервалу $(0,1)$.

а) Наћи Бајесову стандарну оцену (као максимум апостериорне расподеле) параметра p на основу реализованог узорка $\boldsymbol{x}$ (обима n).

б) За какву функцију губитака би се ова оцена показала и оптималном у смислу Бајесовог ризика? Објаснити зашто (идејно или формалним доказом користећи чињеницу да је оцена која има минимални Бајесов ризик једнака математичком очекивању функције губитака у односу на апостериорну расподелу).

3. Нека је $\mathbf{X}$ узорак из фамилије транслираних експонецијалних расподела с густином $f(x;\theta) = e^{\theta-x}$, $x>\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$.

а) Наћи довољну статистику T_n за параметар θ.

б) Нека ненегативна случајна величина Y има густину $g(y)$ која је строго опадајућа функција на $[0,\infty)$. Доказати да је, за фиксирано α, од свих интервала $[a,b]$ за које је $\int_a^b g(y)dy = 1-\alpha$, најкраћи онај код кога је $a=0$.

в) Наћи стожерну величину за параметар θ која је функција од T_n, а затим и оптимални (тј. најкраћи) 90% интервал поверења за параметар θ.

4. Претпоставља се да број људи који уђу у једну банку у центру града у току једног минута има Пуасонову расподелу. Посматрано је 200 једноминутних периода у различитим периодима током једне недеље и добијени су следећи резултати:

број долазака	0	1	2	3	4	5	6	7 и више
број минута	14	31	47	41	29	21	10	7

На пример, ниједна особа није дошла током 14 минута од укупно 200 посматраних и слично за остале вредности.

а) Нека је $\mathbf{X}$ прост случајни узорак и нека је $A_1,\ldots,A_r$ разбијање скупа вредности елемената тог узорка. Ако дефинишемо $Y_j = \mathrm{I}\{X_i\in A_j\}$, $j=1,\ldots,r$, коју расподелу има вектор $\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_r)$?

б) Објаснити како се тестирање хипотезе да је почетни узорак из Пуасонове расподеле, против алтернативе да није из ње, пребацује на тестирање о параметрима расподеле за $\boldsymbol{Y}$.

в) Написати једначину веродостојности, на основу реализованог узорка $y_1,\ldots,y_r$, решавањем које бисмо добили оцену непознатог параметра λ.

г) Претпостављајући да су у последњој класи све вредности баш једнаке 7, наћи приближну оцену параметра λ и, с нивоом значајности од 5% испитати да ли је претпоставка о Пуасоновој расподели броја људи који уђу у банку тачна.