Materija predavana drugačije nego u udžbeniku

Milan Dražić

Materija koja sledi je predavana na času drugačije nego što je to urađeno u standardnom udžbeniku D. Radunović, "Numeričke metode".

1 Lema 1 za Newton-Cotesove formule

Lema 1. Ako je težinska funkcija $p(x)$ parna u odnosu na sredinu odsečka $[a, b]$, a čvorovi x_k su simetrično raspoređeni u odnosu na sredinu odsečka, tj. $t_k = -t_{n-k}$, onda su koeficijenti kvadraturne formule

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

koji odgovaraju simetričnim čvorovima, jednaki, tj. $c_k = c_{n-k}$.

Dokaz 1: Kao u udžbeniku. Dovoljno je znati jedan od više dokaza leme.

Dokaz 2: Kvadraturna formula

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

je tačna za sve polinome stepena $\leq n$, pa je stoga tačna i za $f_j(x) = x^j,\ j = 0, \ldots, n$:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i x_i^j = \int_a^b p(x) x^j\, dx \equiv F_j, \quad C_j = \frac{b-a}{2} c_j, \quad j = 0, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Preslikavanje $x = a + b - t$ predstavlja simetriju u odnosu na sredinu $(a + b)/2$ odsečka $[a, b]$. Za polinome $g_j(x) = (a + b - x)^j,\ j = 0, \ldots, n$ je formula takođe tačna, pa je

$$\sum_{i=0}^{n} C_i (a + b - x_i)^j = \int_a^b p(x)(a + b - x)^j\, dx\,.$$

Zbog simetrije čvorova je

$$\sum_{i=0}^{n} C_i (a + b - x_i)^j = \sum_{i=0}^{n} C_i x_{n-i}^j = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i} x_i^j\,,$$

a zbog parnosti težinske funkcije $p(x)$ je

$$\int_a^b p(x)(a + b - x)^j\, dx = \int_a^b p(a + b - t) t^j\, dx = \int_a^b p(t) t^j\, dx = F_j\,.$$

Povezujući tri poslednje relacije zajedno, dobijamo linearni sistem jednačina

$$\sum_{i=0}^{n} C_{n-i} x_i^j = F_j, \quad j = 0, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Sistemi (1) i (2) imaju istu matricu sistema koja je regularna kao i desnu stranu, pa stoga imaju i ista rešenja

$$C_i = C_{n-i}\,.$$

Stoga je i $c_i = c_{n-i}$.

Dokaz 3: Iz konstrukcije kvadraturnih formula je $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, $\bar{p}(t) \equiv p(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t)$, a iz uslova leme je $\bar{p}(-t) = \bar{p}(t)$, $t_i = -t_{n-i}$. Zato je

$$\begin{aligned}
C_k &= \int_{-1}^{1} \bar{p}(t) \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{t - t_j}{t_k - t_j} \right) dt \\
&\overset{(t=-s)}{=} \int_{-1}^{1} \bar{p}(-s) \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{-s + t_j}{-t_k + t_j} \right) ds \\
&= \int_{-1}^{1} \bar{p}(s) \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{s - t_j}{t_k - t_j} \right) ds \\
&\overset{(n-j=l)}{=} \int_{-1}^{1} \bar{p}(s) \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l\neq n-k}}^{n} \frac{s - t_l}{t_{n-k} - t_l} \right) ds \\
&= C_{n-k}\,.
\end{aligned}$$

2 Iterativne metode za sisteme linearnih jednačina

Opšti oblik iterativnog procesa je

$$x_{k+1} = G_k(x_0, x_1, \ldots, x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

gde je početna iteracija x_0 poznata. Pod nekim uslovima će niz $\{x_k\}$ konvergirati rešenju problema koji se razmatra. Ukoliko funkcija G_k zavisi samo od $x_k, \ldots, x_{k-l}$, tada kažemo da je metoda $l+1$ slojna. Metoda koja zavisi samo od x_k je dvoslojna (povezuje slojeve k i $k+1$), a ona koja zavisi od x_k i x_{k-1} je troslojna. Ukoliko funkcija $G_k = G$ ne zavisi od indeksa k, tada metodu zovemo stacionarnom.

Za rešavanje regularnog sistema linearnih jednačina $Ax = b$, sistem zapisujemo u ekvivalentnom obliku $x = Bx + c$ (da bi imali ista rešenja, mora biti $c = (I - B)A^{-1}b$), pa odatle dobijamo dvoslojni iterativni proces

$$x_{k+1} = Bx_k + c\,, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Važi sledeća teorema koja daje potrebne i dovoljne uslove konvergencije.

Teorema 1. Neka sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rešenje. Tada iterativni proces $x_{k+1} = Bx_k + c$ konvergira ka tom rešenju za svaki početni vektor x_0 ako i samo ako su sve sopstvene vrednosti matrice B po modulu manje od 1.

Dokaz: Dokažimo prvo da je uslov potreban. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neka sopstvena vrednost λ_0 takva da je $|\lambda_0| \geq 1$. Neka je v_0 odgovarajući sopstveni vektor. Izaberimo za početnu iteraciju

$$x_0 = x + v_0\,,$$

gde je x tačno rešenje sistema. Tada je, zbog $x = Bx + c$,

$$x_k - x = Bx_{k-1} - Bx = \cdots = B^k(x_0 - x) = B^k v_0 = \lambda_0^k v_0 \not\to 0,\ k \to \infty\,.$$

Pošto konvergencija ne važi za sve početne vektore, ne važi pretpostavka, pa mora biti $|\lambda_i| < 1$ za svako i.

Dokažimo sada da je uslov dovoljan. Pretpostavimo da je $|\lambda_i| < 1$ za svako i. Pošto je, od ranije,

$$x_k - x = B^k(x_0 - x)\,,$$

dovoljno je dokazati da matrica $B_k \to 0,\ k \to \infty$. Neka su $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, m$ sopstvene vrednosti višestrukosti n_i: $n_1 + \cdots + n_m = n$. Matrica B je slična Žordanovoj matrici

$$B = C^{-1}JC\,,$$

gde je C regularna matrica, a J blok dijagonalna matrica

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_m \end{bmatrix}$$

gde je

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}\,.$$

Zbog $B^k = C^{-1}J^kC$, dovoljno je dokazati da $J^k \to 0$, a pošto je

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_m^k \end{bmatrix}$$

biće dovoljno dokazati da matrica $J_i^k \to 0$. Indukcijom se pokazuje da je

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \ldots & \binom{k}{n_i - 1}\lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ldots & \binom{k}{n_i - 2}\lambda_i^{k-n_i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i^k \end{bmatrix}\,.$$

pa, zbog $|\lambda_i| < 1$, svaki element matrice konvergira nuli, $J_i^k \to 0,\ k \to \infty$. Odavde $J^k \to 0,\ k \to \infty$, pa $B^k \to 0,\ k \to \infty$, odakle sledi da $x^k \to x,\ k \to \infty$, čime je dokaz teoreme završen.

Dovoljne uslove konvergencije daje sledeća teorema

Teorema 2. Ako je neka norma matrice B, saglasna sa nekom normom vektora, manja od 1, tada iterativni proces $x_{k+1} = Bx_k + c$ konvergira.

Dokaz: Uslov saglasnosti normi vektora i matrice daje $||Bx|| \leq ||B||\,||x||$. Ako je λ_i proizvoljna sopstvena vrednost i v_i odgovarajući sopstveni vektor, biće

$$|\lambda_i|\,||v_i|| = ||\lambda_i v_i|| = ||Bv_i|| \leq ||B||\,||v_i||\,,$$

odakle je, pošto je sopstveni vektor različit od nula vektora, $|\lambda_i| \leq ||B||$. Zbog pretpostavke da je $||B|| < 1$, biće $|\lambda_i| < 1$, pa dokaz sledi neposrednom primenom prethodne teoreme.

3 Stabilnost rešenja sistema linearnih jednačina

U udžbeniku je dokazano da za rešenja sistema

$$Ax = b \qquad \text{i} \qquad Ax' = b'$$

važi ocena

$$\frac{||x' - x||}{||x||} \leq cond(A)\,\frac{||b' - b||}{||b||}\,.$$

Ukoliko dopustimo da se menjaju i elementi matrice sistema, tada treba da uporedimo rešenja sistema

$$Ax = b \qquad \text{i} \qquad A'x' = b'\,.$$

Ukoliko sa b'' obeležimo proizvod $Ax' = b''$, zbog $Ax = b$ dobijamo

$$\begin{aligned} b'' &= b' - (A' - A)x' \\ &= b' - (A' - A)(A')^{-1}b'\,. \end{aligned}$$

Primenom prethodnog rezultata na sisteme $Ax = b$ i $Ax' = b''$ dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{||x' - x||}{||x||} &\leq cond(A)\,\frac{||b' - b - (A' - A)(A')^{-1}b'||}{||b||} \\ &\leq cond(A)\left\{\frac{||b' - b||}{||b||} + \frac{||A' - A||\,||A^{-1}||\,||b'||}{||b||}\right\} \\ &= cond(A)\left\{\frac{||b' - b||}{||b||} + cond(A')\,\frac{||b'||}{||b||}\,\frac{||A' - A||}{||A'||}\right\}\,. \end{aligned}$$

Može se takođe dokazati, pod pretpostavkom da je $||A' - A|| \leq 1/||A||$, da važi

$$\frac{||x' - x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\dfrac{||A' - A||}{||A||}}\left\{\frac{||b' - b||}{||b||} + \frac{||A' - A||}{||A||}\right\}\,.$$

4 Banahova teorema o nepokretnoj tački

Neka je B zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora X, $B \subset X$.

Definicija. Preslikavane $f : B \to B$ se naziva kontrakcija ako postoji konstanta $q < 1$ takva da je

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq q\, d(x_1, x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in B\,.$$

Banahova teorema. Neka je B zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora X, i neka je $f : B \to B$ kontrakcija. Tada

1. Niz $\{x_n\}$ određen sa $x_{n+1} = f(x_n)$, za proizvoljno $x_0 \in B$ konvergira ka nekoj tački $\bar{x} \in B$.
2. Tačka $\bar{x}$ je nepokretna tačka, tj. $f(\bar{x}) = \bar{x}$, i jedinstvena je.
3. Važi

$$\begin{aligned} d(x_n, \bar{x}) &\leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1) \\ d(x_n, \bar{x}) &\leq \frac{q}{1-q}\, d(x_n, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Dokaz: 1. Pošto je f kontrakcija, biće

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n d(x_0, x_1)\,.$$

Zbog ovoga je, za $m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1)\,. \end{aligned}$$

Kada $n, m \to \infty$ tada $d(x_n, x_m) \to 0$, pa je $\{x_n\}$ Košijev niz i kao takav konvergira nekoj tački $\bar{x} \in X$. Zbog zatvorenosti B je i $\bar{x} \in B$.

2. Važi da je

$$d(x_{n+1}, f(\bar{x})) = d(f(x_n), f(\bar{x})) \leq q\, d(x_n, \bar{x}) \to 0, \quad n \to \infty\,,$$

pa je $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(\bar{x})$. Pošto konvergentan niz ima jedinstveni limes, $\bar{x} = f(\bar{x})$. Neka su $\bar{x}$ i $\bar{\bar{x}}$ nepokretne tačke: $\bar{x} = f(\bar{x})$ i $\bar{\bar{x}} = f(\bar{\bar{x}})$. Biće

$$d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) \leq q\, d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \quad \Rightarrow \quad (1-q)\, d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

što je, zbog $q < 1$, moguće samo ako je $d(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$, tj. $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.

3. U tački 1. je dokazano da je

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1)\,.$$

Uzimajući graničnu vrednost kad $m \to \infty$, i koristeći neprekidnost rastojanja, dobijamo

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1)\,.$$

Na kraju,

$$\begin{aligned} d(x_n, \bar{x}) &= d(f(x_{n-1}), f(\bar{x})) \\ &\leq q\, d(x_{n-1}, \bar{x}) \\ &\leq q(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, \bar{x})) \end{aligned}$$

pa je odatle

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{q}{1-q}\, d(x_n, x_{n-1})\,.$$