Niz $(1 + x/n)^n$ kao temelj svetskog poretka i reforme nastave matematike

`ili`

Balada o čistoj i primenjenoj matematici začinjena apsurdom, groteskom i zlonamernim aluzijama

Miroslav Pavlović

1 Uvod

Sve važne formule u finansijskoj matematici moguće je izvesti iz jedne proste, naime,

$$FV = (1 + r)PV, \qquad \begin{bmatrix} FV = \text{future value} \\ PV = \text{present value} \end{bmatrix}$$

ili, što je skoro isto,

$$PV = \frac{FV}{1 + r},$$

gde je r STOPA (kamatna, recimo). Na dugi rok stopa se može menjati, ali je kratkoročno konstantna. Ko poseduje moć da menja veličinu stope, upravlja svetom. Ko shvata tu moć, a besan je što je ne poseduje, može se smiriti baveći se matematikom.

A nema matematičara koji u dušu ne poznaje niz

$$E_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ali zaprepašćuje mali broj onih [1] koji su upoznati sa nizom

$$E_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n > -x, \ x \in \mathbb{R}.$$

[1]medju asistentima Matematičkog fakulteta u Beogradu

S druge strane, taj niz je poznat velikom broju ekonomista – svima koji su učili kamatni račun. Još crnje: oni ne samo što znaju da

(1) $E_n(x)$ raste kad n raste a x miruje

već to i vide. Šta je razlog ove nemile pojave?

Ali, podsetimo se kako se u udžbenicima matematike na skaredan način „dokazuje“ jednakost

$$\lim_{n\to\infty} E_n(x) = e^x. \tag{2}$$

`Krenimo od jednakosti`

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e. \tag{3}$$

`Stavimo` $t = n/x$, `gde je` $x \neq 0$ `fiksirano; dobićemo`

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e. \tag{4}$$

`Sada ovu jednakost stepenujemo sa` x; `dakle,`

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\\ &= e^x.\end{aligned}$$

2 Slučaj $x > 0$

Zamislite sebe kao profesora [2] Ekonomskog fakulteta, [3]. Pored toga, vi ste član Upravnog Odbora i držite se neupravnog govora,[4]. Elem, stekli ste početni kapital

$$K_0 = \$100\,000.$$

[2] ili asistenta

[3] kamo ste dovedeni jerbo ste mnogo pametni

[4] tj. izražavate se indirektno i diskretno

Sine vam ideja da ga oročite na godinu dana. U vašem gradu postoji nekoliko ([5]) banaka. Odlazite u banku $\mathfrak{B}_1$:

– Kod nas je kamatna stopa 10%. Dakle, za godinu dana imali biste \$110 000.

Zašto se ljutite? otkud banka zna da ste matematičar!

U banci $\mathfrak{B}_2$:

– Kamatna stopa je 10%, na godišnjem nivou, ali nudimo šestomesečno ukamaćivanje. Dakle, za godinu dana imali biste \$110 250, – reče službenik gledajući u tablicu.

U banci $\mathfrak{B}_4$:

– Godišnja stopa je svuda ista, ali mi nudimo i tromesečno. Za godinu dana imali biste više nego kod onih; ne znam koliko, ali mogu naći u tablici.

– Ne, hvala, – odgovarate vi, shvativši sve u momentu (vidi fusnotu 3).

Sedate u fotelju, vadite papir i olovku i pišete:

Označimo kamatnu stopu sa x (ovde je $x = 0.10$).
*Slučaj $\mathfrak{B}_1$ je jasan: budu*ć*a vrednost kapitala je*

$$K_1 = (1 + x)K_0.$$

Šta se radi u slučaju $\mathfrak{B}_2$? Vrednost kapitala kroz šest meseci biće jednaka

$$K_{1,1} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)K_0.$$

Zašto? Zato što je, po dogovoru,

$$\texttt{nominalna polugodišnja stopa} = \frac{\texttt{nominalna godišnja stopa}}{2}.$$

Idući dalje, nalazite na trotoaru da će u slučaju $\mathfrak{B}_2$ vrednost kapitala kroz godinu dana iznositi

$$K_2 = \left(1 + \frac{x}{2}\right)K_{1,1} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 K_0.$$

Slična razmatranja dovode vas do kafane i zaključka da će u slučaju $\mathfrak{B}_4$ vrednost vašeg novca, posle godinu dana koje ćete provesti na Havajima,[6],

[5] više od četiri

[6] u svojstvu gostujućeg profesora

iznositi

$$K_4 = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 K_0.$$

Naravno, ne propuštate priliku za munjevitu generalizaciju:

$$K_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n K_0 = E_n(x)\, K_0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

I opet naravno, – očekujete da K_n raste, i formulišete stav o šakama.

Stav 1. Ako je $x \geq 0$, onda niz $n \mapsto E_n(x)$ raste.

Pred mogućnošću da zgrnete neograničenu količinu novca povećavajući broj ukamaćivanja, zaboravljate da je $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = e^x$ i dajete sebi nadu da niz K_n neograničeno raste:

Nada. Iako je stopa x fiksirana, niz $E_n(x)$ je neograničen.

Šipak. Nada je lažna.

3 Slučaj $x < 0$

Zamislite da vas reketiraju po nominalnoj godišnjoj stopi $r = 10\%$. Nude vam reketiranje n puta godišnje po stopi r/n. Vrednost vašeg kapitala na kraju godine biće

$$K_n = \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n K_0.$$

Stav 2. Ako je $r > 0$, onda niz $n \mapsto E_n(-r)$ raste počev od $n = [r] + 1$.[7]

Zadatak 1. Dokažite da niz $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ opada.

4 Matematički dokaz

Samo matematičari smatraju da se stavovi 1 i 2 jednom zauvek mogu zameniti jednim:

Stav 3. Ako je x bilo koji realan broj, onda niz $n \mapsto E_n(x)$ raste počev od prvog indeksa n za koji je $1 + x/n > 0$.

[7] $[r]$ = celi deo od r

I, samo matematičari dokazuju ono što je već svakom jasno.

Dokaz. Stavimo

$$a = 1 + \frac{x}{n+1} \quad \& \quad b = 1 + \frac{x}{n}.$$

Tada je

$$\frac{E_{n+1}(x)}{E_n(x)} = \frac{a^{n+1}}{b^n},$$

i

$$(n+1)a - nb = 1,$$

pa traženi rezultat sledi iz ove leme:

Lema 1. Za sve pozitivne realne brojeve a, b važi nejednakost

$$\frac{a^{n+1}}{b^n} \geq (n+1)a - nb, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Nejednakost (5) je samo jedna od raznih varijanti Bernulijeve nejednakosti. Naime:

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1}}{b^n} &= b\Big(\frac{a}{b}\Big)^{n+1} \\ &\geq b\,\Big(\,1 + (n+1)\big(\frac{a}{b} - 1\big)\,\Big) \\ &= (n+1)a - nb. \end{aligned}$$

Time je dokaz stava 3 završen. . . . . $\square$

Nejednakost (5) zaslužuje malo pažnje.[8] Iz dokaza sledi da ona važi za svako $n \in \mathbb{Z}$, jer Bernulijeva nejednakost,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x > -1, \tag{6}$$

važi za svako $n \in \mathbb{Z}$. Ali je lepše to što su i leva i desna strana napisane u istom obliku, samo što se leva odnosi na multiplikativnu grupu pozitivnih realnih brojeva, a desna na grupu $(\mathbb{R}, +)$. Tu je i grupa $(\mathbb{Z}, +)$, koja „skladno“ dejstvuje na obe te grupe. I tako dalje, – mogućnosti za razna uopštenja, raznim pravcima, skoro su neograničene.

[8] Setite se gde ste je videli.

4.1 Bankarska formulacija Bernulijeve nejednakosti

Gradjanin X i gradjanin Y poseduju jednaku količinu novca, K_0. Obojica hoće da svoj kapital drže u istoj banci n godina, [9]. Gradjanina X ubede da je kamatu bolje obračunavati po prostom kamatnom računu (prostije je): svake godine se dodaje 10 procenata ($\leftarrow$ na primer) početne vrednosti K_0. Dakle, po isteku n godina stanje na računu gradjanina X biće

$$k_n = (1 + nx)K_0,$$

gde je $x = 10\% = 0.10$. S druge strane, stanje na računu gradjanina Y, koji se opredelio za složeni kamatni račun[10], uz stopu $x = 0.10$, biće

$$K_n = (1 + x)^n K_0.$$

Jasno je da je $K_n > k_n$, za $n \geq 2$, i eto Bernulijeve nejednakosti za $x > 0$.

Ekonomisti više vole sledeću formulaciju:

Uz isti početni kapital i istu kamatnu stopu, obračunavanje kamate po složenom računu donosi više para nego obračunavanje po prostom.

Zadatak 2. Preformulišite nejednakost (6) za $x < 0$.

Zadatak 3. Formulišite stavove 1 i 2 kao ekonomisti.

5 Naravoučenije

Ne treba mnogo pameti da bi se pronašao onako kratak dokaz stava 3, kao i kakvog drugog stava koji je otkrio Jakov Bernuli. Ali ako je za takva otkrića potrebna genijalnost, za njihovu prezentaciju, svakako, nije.

[9] gde je n pozitivan ceo broj?

[10] „kamata na kamatu“

Ako ste priključeni na Internet, kliknite na link i naći ćete kratku istoriju broja e, iz koje sam isekao jedan deo.

`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html`

"Perhaps surprisingly, since this work on logarithms had come so close to recognising the number e, when e is first "discovered" it is not through the notion of logarithm at all but rather through a study of compound interest. In 1683 Jacob Bernoulli looked at the problem of compound interest and, in examining continuous compound interest, he tried to find the limit of $(1 + 1/n)^n$ as n tends to infinity. He used the binomial theorem to show that the limit had to lie between 2 and 3 so we could consider this to be the first approximation found to e. Also if we accept this as a definition of e, it is the first time that a number was defined by a limiting process. He certainly did not recognise any connection between his work and that on logarithms."

Slika pokazuje Jakova Bernulija (1654– 1705).