1 Stabilnost numeričkih metoda za Košijeve zadatake

Posmatrajmo Košijev zadatak

$$u' = \lambda u(x), \quad u(0) = u_0, \quad \lambda = a + bi$$

Rešenje ovog zadatka je

$$u(x) = u(0)\, e^{\lambda x} = u(0)\, e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$$

Ovo rešenje je ograničeno ako i samo ako je $a = Re\lambda \leq 0$, tj. u levoj kompleksnoj poluravni po λ. Ukoliko, za ovakvo ograničeno rešenje, približno rešenje neograničeno raste, algoritam za rešavanje je nestabilan.

Posmatrajmo sada linearni sistem diferencijalnih jednačina

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u}(x), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \ .$$

Ako je J Žordanova matrica, takva da je $C^{-1}AC = J$ za neku regularnu matricu C, nakon smene $\mathbf{u} = C\mathbf{v}$ dobijamo sistem

$$\mathbf{v}' = J\mathbf{v}(x)$$

koji se u slučaju različitih sopstvenih vrednosti λ_i matrice A (tj. elemenata dijagonalne matrice J) raspada na

$$v_i' = \lambda_i v_i(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

pa će rešenja sistema biti ograničena ako je $Re(\lambda_i) \leq 0,\ i = 1, \ldots, n$.

1.1 Eksplicitna Ojlerova metoda

Za eksplicitnu Ojlerovu metodu će biti, ako označimo $\mu = h\lambda$:

$$u_j = u_{j-1} + h\lambda u_{j-1} = (1+\mu)u_{j-1} = (1+\mu)^j u_0 \,.$$

Metoda će biti stabilna za $|1 + \mu| \leq 1$, a to je unutrašnjost kruga sa centrom u -1 poluprečnika 1 u kompleksnoj μ ravni. Za realno $\lambda < 0$, da bi metoda bila stabilna mora biti ispunjen uslov $h \leq 2/|\lambda|$.

1.2 Implicitna Ojlerova metoda

Za implicitnu Ojlerovu metodu će biti

$$u_j = u_{j-1} + h\lambda u_j = u_{j-1} + \mu u_j \quad \Rightarrow \quad (1-\mu)u_j = u_{j-1}$$

pa je

$$u_j = \frac{1}{1-\mu}\, u_{j-1} = \frac{1}{(1-\mu)^j}\, u_0$$

Metoda će biti stabilna za $|1-\mu| \geq 1$, a to je spoljašnost kruga sa centrom u 1 poluprečnika 1 u kompleksnoj μ ravni. Metoda je stabilna za bilo koje realno $\lambda < 0$.

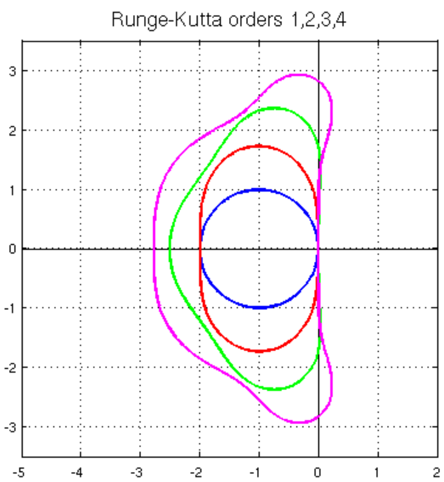

Figure 1: Runge-Kuta metode reda 1–4

1.3 Modifikacija Ojlerove metode

Za modifikaciju Ojlerove metode će biti

$$u_j = u_{j-1} + \frac{h\lambda}{2}(u_{j-1} + u_j) = u_{j-1} + \frac{\mu}{2}(u_{j-1} + u_j) \quad \Rightarrow \quad (1 - \frac{\mu}{2})u_j = (1 + \frac{\mu}{2})u_{j-1}$$

pa je

$$u_j = \frac{1 + \frac{\mu}{2}}{1 - \frac{\mu}{2}} u_{j-1} = \left(\frac{1 + \frac{\mu}{2}}{1 - \frac{\mu}{2}} \right)^j u_0$$

Metoda će biti stabilna za $|1 + \frac{\mu}{2}| \leq |1 - \frac{\mu}{2}|$, a to je cela leva kompleksna poluravan, što potpuno odgovara polaznom Košijevom zadatku.

1.4 Dijagrami oblasti stabilnosti

I za druge metode kao što su Runge-Kuta, Adamsove ili Girove se mogu sličnom analizom odrediti oblasti stabilnosti metoda. Granice oblasti stabilnosti metoda su prikazane na priloženim slikama

1.5 Stabilnost metoda za sisteme DJ

Za sisteme diferencijalnih jednačina je analiza stabilnosti skoro ista kao u slučaju jedne jednačine. Ilustrujmo to na primeru eksplicitne Ojlerove metode u slučaju da su sopstvene vrednosti matrice A različite. Za eksplicitnu Ojlerovu metodu će biti

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j-1} + hA\mathbf{u}_{j-1} = (I + hA)\mathbf{u}_{j-1} \ .$$

Pošto je $C^{-1}(I + hA)C = I + hJ$, posle smene $\mathbf{u}_j = C\mathbf{v}_j$ će biti

$$\mathbf{v}_j = (I + hJ)\mathbf{v}_{j-1}$$

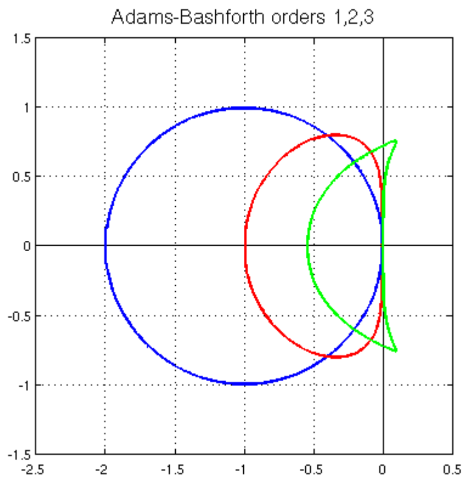

Figure 2: Eksplicitne Adamsove metode reda 1–3

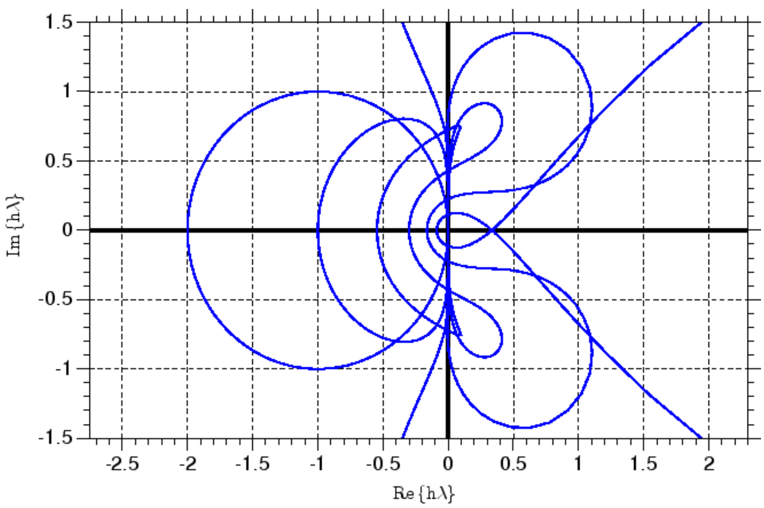

Figure 3: Eksplicitne Adamsove metode reda 1–6

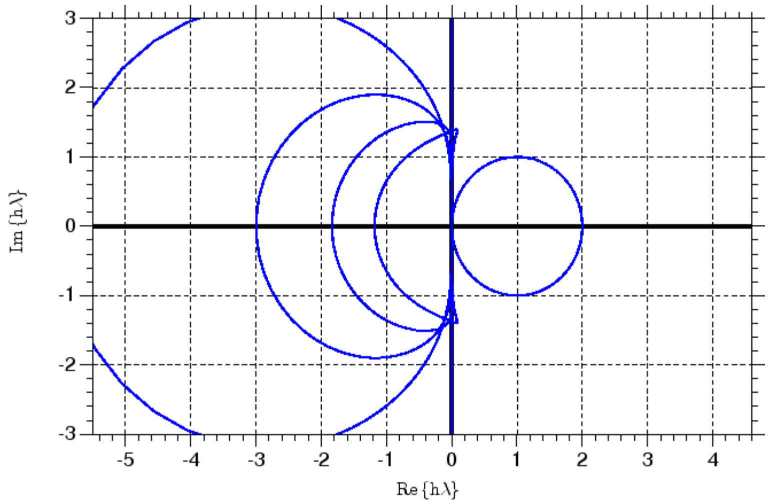

Figure 4: Implicitne Adamsove metode reda 1–6

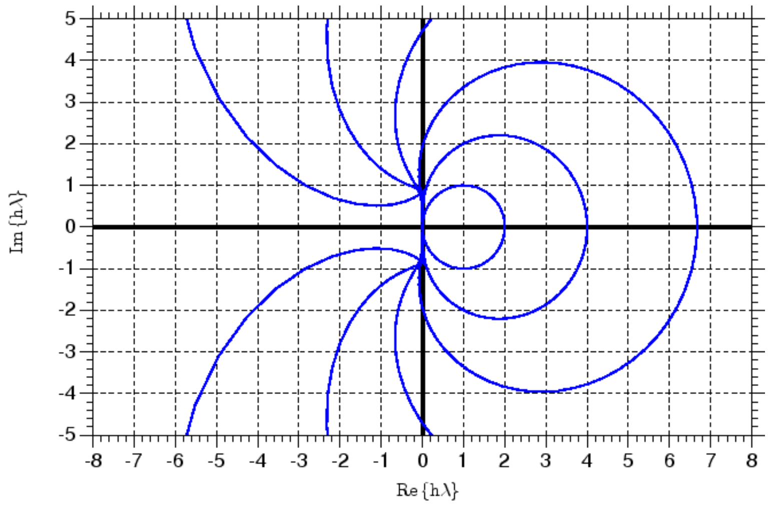

Figure 5: Girove BDF metode reda 1–6

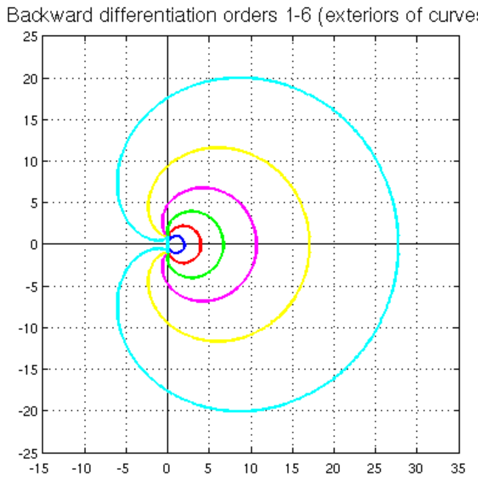

Figure 6: Girove BDF metode reda 1–6

pa, pošto je matrica u zagradi dijagonalna, ovaj sistem za $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ se raspada na

$$v_{i,j} = (1 + h\lambda_i)\, v_{i,j-1}, \quad i = 1, \ldots, n$$

što je isto kao u slučaju običnih jednačina, pa se dobijaju i isti uslovi stabilnosti.

2 Konvergencija numeričkih metoda za Košijeve zadatke

Numeričku metodu ćemo zvati **konzistentnom** ukoliko za njenu lokalnu grešku $R(h)$ važi da je

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \ .$$

Ovaj uslov omogućava da greška na celom intervalu integracije konvergira nuli sa smanjenjem koraka h.

Teorema (Dalkvistova teorema ekvivalencije) Linearna višekoračna metoda koja je konzistentna sa diferencijalnom jednačinom čija desna strana zadovoljava Lipšicov uslov je konvergentna ako i samo ako je stabilna.

Ovaj rezultat se često sreće i u obliku

$$\textbf{aproksimacija} + \textbf{stabilnost} \Leftrightarrow \textbf{konvergencija} \ .$$

3 Kruti sistemi diferencijalnih jednačina

Termin krutosti za neki problem nije precizno definisan. Opis ovog fenomena može biti:

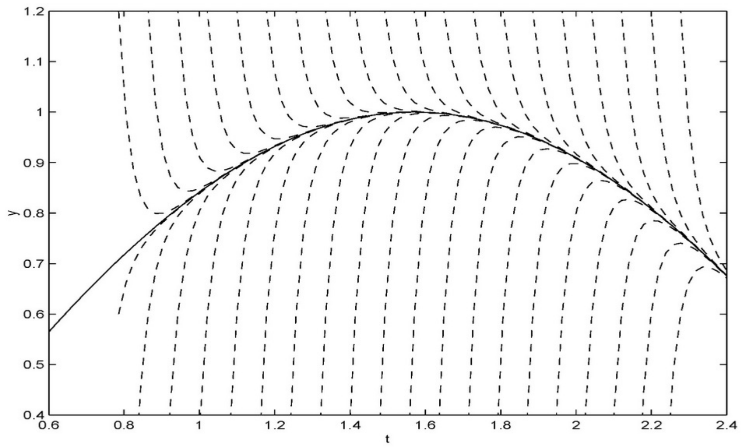

Figure 7: Kruta diferencijalna jednačina

- Problem je krut ako sadrži veoma različite vremenske skale, tj. neke komponente rešenja opadaju mnogo brže od drugih.
- Problem je krut ukoliko korak pri rešavanju moramo smanjivati zbog stabilnosti a ne tačnosti aproksimacije.
- Problem je krut ukoliko se eksplicitne metode ne mogu primeniti ili zahtevaju ogroman broj koraka.
- Linearan problem je krut ako sve njegove sopstvene vrednosti imaju negativan realni deo a odnos najveće i najmanje po modulu sopstvene vrednosti je veliki.
- Generalno, problem je krut ukoliko sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice desne strane sistema veoma variraju po redu veličine.

Jednačina

$$u' = \lambda(u - \sin x) + \cos x$$

ima rešenje

$$u(x) = e^{\lambda(x-x_0)}(u(x_0) - \sin x_0) + \sin x \ .$$

Za negativne, a velike po modulu vrednosti parametra, recimo $\lambda = -50$ prvi sabirak u rešenju vrlo brzo konvergira nuli, ali uzrokuje nestabilnost kod eksplicitnih metoda ukoliko korak integracije nije vrlo mali. Zato se za rešavanje krutih problema po pravilu koriste implicitne metode koje su stabilne na celom negativnom delu realne ose kompleksne ravni.