Функцију $f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}, & x \neq k\pi, |\alpha| < 1; \\ \lim\limits_{x\to k\pi} f(x), & x = k\pi. \end{cases}$ развити у Фуријеов ред.

Решење. Функција $f(x)$ има период 2π и парна је, па су коефицијенти b_k једнаки нули, а коефицијенти a_k су

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}\right)\cos kx dx.$$

С обзиром је $\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leq n$ за $x \neq k\pi$, $\left|\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\right| = n$ и да ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ конвергира онда ред под знаком интеграла конвергира по Вајерштрасовом критеријуму.

Интеграцијом члан по члан добијамо

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^n\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\cos kx dx\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^n\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+k)x - \sin(n-k)x}{\sin x}\right)$$

Израчунајмо следеће интеграле за $m \in \mathbb{Z}$

$$I_{2m} = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin 2mx}{\sin x}dx = (x = \pi - t) = -\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin 2mt}{\sin t}dx = -I_{2m},$$

а одавде $I_{2m} = 0$.

Израчунајмо интеграле $I_{2m-1} = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}dx$ на следећи начин

$$I_{2m+1} - I_{2m-1} = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(2m+1)x - \sin(2m-1)x}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos(2m)x\ \sin x}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(2m)x dx = 0.$$

Према томе, $I_{2m+1} = I_{2m-1} = ... = I_3 = I_1 = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x}dx = \int\limits_{0}^{\pi}dx = \pi$.

Одавде следи да је $I_{1-2m} = -\pi$, због непарности функције $\sin x$.

Добили смо

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^n\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+k)x + \sin(n-k)x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(I_{k+n} + I_{-k+n}) \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n(I_{k+n} + I_{-k+n}) = 2(\alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} + ...) = \frac{2\alpha^{k+1}}{1-\alpha^2}. \end{aligned}$$

Фуријеов ред функције је

$$f(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{2}{1-\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{k+1}\cos kx.$$