1 Функције

1.1 Теоријски увод

Функција или пресликавање је правило придруживања једног елемента из скупа X који се тада назива **домен** функције, другом елементу из скупа Y-**кодомен** функције, који се још назива и скуп копија, скуп слика. Домен функције f се често означава са $\mathcal{D}(f)$, а кодомен са $\mathcal{R}(f)$. Елементи скупа X називају се аргументи, независно промењљиве, оригинали пресликавања или елементи домена.

За записивање функција обично се користе неке од следећих ознака:

$$f : X \to Y,\ f : x \to y,\ x \in X,\ y \in Y. \text{ или } y = f(x).$$

Функција $f : A \to B$ зове се сурјекција, или "**на**"-пресликавање, ако је $\mathcal{R}(f) = B$, што се може записати и као:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x).$$

Односно, функција је сурјекција ако и само ако су сви елементи кодомена нечије слике. Сурјекција по дефиницији дозвољава дупле копије, тј. да се више елемената из домена пресликавају у исти елемент кодомена.

Функција $f : A \to B$ зове се инјекција, или "**1-1**"-пресликавање, ако важи:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Дакле, иста слика не може бити резултат пресликавања различитих оригинала. Инјекција по дефиницији дозвољава да у скупу слика постоје елементи који уопште нису резултат пресликавања.

Функција која је сурјекција и инјекција зове се **бијекција**.

Под функцијом реалне промењљиве, мисли се на функцију $f : X \to Y$, где је $X \subseteq \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$. Другим речима, функција реалне промењљиве је свака функција чији је домен подскуп скупа реалних бројева $\mathbb{R}$ или цео скуп $\mathbb{R}$, а кодомен јој је $\mathbb{R}$.

За скуп $X \subset \mathbb{R}$ кажемо да је **симетричан**, ако за свако $x \in X$ и $-x \in X$. Функцију дефинисану на симетричном скупу називамо **парном**, ако за је свако $x \in X, f(x) = f(-x)$. Свака парна функција је симетрична у односу на y-осу.

Функцију дефинисану на симетричном скупу називамо **непарном**, ако за је свако $x \in X$, $f(x) = -f(-x)$. Свака непарна функција је симетрична у односу на координатни почетак.

За функцију реалне промењљиве $f : X \to \mathbb{R}$ кажемо да је **периодична** са периодом T, ако постоји $T > 0$ такво да важи: $f(x + T) = f(x)$. Најмањи такав број T (ако постоји), назива се **основним периодом** функције f.

Интересантна периодична функција је, рецимо: Дирихлеова функција $D\colon \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$ дефинисана као:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

која је периодична, али нема најмањи период.

Монотоност функције означава својство оних функција које задовољавају било који од следећих услова:

растућа функција $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
строго растућа функција $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
опадајућа функција $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
строго опадајућа функција $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
Нула функције одређују се решавањем једначине $f(x) = 0$.

Изводом функције $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ у тачки $x\in(a,b)$ назива се коначна следећа гранична вредност
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
где је $f(x+h)-f(x)$ прираштај функције $f(x)$ у тачки x који одговара прираштају аргумента h. Извод ћемо означити са $f'(x)$.

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$	Важи за
1.	$c=const$	0	$x\in\mathbb{R}$
2.	x	1	$x\in\mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha\in\mathbb{R}, x>0$ $\alpha=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, q$ непарно, $x\neq 0$ $\alpha=\frac{p}{q}>1, q$ непарно, $x\in\mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x\ln a$	$a>0, a\neq 1, x\in\mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$a>0, a\neq 1, x>0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
8.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
9.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
11.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
12.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
13.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
14.	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$x\in\mathbb{R}$
15.	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$x\in\mathbb{R}$
16.	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x\in\mathbb{R}$
17.	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x\neq 0$
18.	$\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x\in\mathbb{R}$
19.	$\operatorname{arch} x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x>1$
20.	$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert<1$
21.	$\operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert>1$

Затим, важи

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна (има први извод) на интервалу (a, b). Тада важи

а) функција $f(x)$ је растућа на интервалу (a, b) ако и само ако је $f'(x) \geq 0$ за сваки $x \in (a, b)$

б) функција $f(x)$ је опадајућа на интервалу (a, b) ако и само ако је $f'(x) \leq 0$ за сваки $x \in (a, b)$

в) ако је $f'(x) > 0$ за сваки $x \in (a, b)$, тада је функција $f(x)$ строго растућа на интервалу $(a, b$

г) ако је $f'(x) < 0$ за сваки $x \in (a, b)$, тада је функција $f(x)$ строго опадајућа на интервалу (a, b).

Ако први извод $f'(x)$ мења предзнак у критичној тачки c, тада функција $f(x)$ има локални екстремум у тачки c. При томе важи следеће: ако $f'(x)$ мења предзнак са $-$ на $+$, тада је $f(c)$ локални минимум, а ако $f'(x)$ мења предзнак са $+$ на $-$, тада је $f(c)$ локални максимум.

Нека је функција $f(x)$ два пута диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако је $f''(x) > 0$ за сваки $x \in (a, b)$, тада је функција $f(x)$ строго конвексна на интервалу (a, b). Ако је $f''(x) < 0$ за сваки $x \in (a, b)$, тада је функција $f(x)$ строго конкавна на интервалу (a, b).

1.2 Задаци рађени на припреми

1. Одредити област дефинисаности функције $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(x+5)^2} + \frac{1}{\arccos(x+3)}$. $(-4, -2)$

2. (П) Дате су функције $f_1(x) = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $f_2(x) = \arcsin x \cdot \arctan x$, $f_3(x) = \sin x + \cos x$ и $f_4(x) = \frac{1+\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$. Ако са p означимо број парних, а са n број непарних међу овим функцијама, наћи p и n. $p = 1$ и $n = 2$.

3. (П) Колики је основни период функције $f(x) = \frac{1}{3} \tan \frac{x}{3} - \frac{1}{5} \cos \frac{2x}{5}$? 15π

4. Ако је $f(x-4) = \frac{x-7}{x-2}$, одредити $f(x)$. $f(x) = \frac{x-3}{x+2}, x \neq -2$.

5. (П) Ако је $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^2$, наћи $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{9}{4}$

6. (П) Наћи све реалне бројеве a тако да за функције $f(x) = ax$ и $g(x) = x + a$ важи $f(g(x)) = g(f(x))$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

7. Ако је $g(f(x)) = \frac{x}{2}$ и $g(x) = \log_{16} x$, наћи $f(-1) + f\left(-\frac{3}{2}\right)$. $\frac{3}{8}$

8. Одредити функцију облика $f(x) = a + bc^x$, ако је $f(0) = 15$, $f(2) = 30$ и $f(4) = 90$. $a = 10, b = 5, c = 2$

9. Ако је $f(x+1) = 5x + 2$, одредити инверзну функцију $f^{-1}(x)$.

10. Да ли је функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2+x^2}$ "1-1" и "на"? Ако није, наћи скупове A и B тако да функција $f\colon A \to B$, $f(x) = \frac{3}{2+x^2}$ буде "1-1" и "на".

11. (П) Дате су функције $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ и $f_3(x) = \frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$. Тачно је тврђење:
А) све дате функције су једнаке међу собом Б) међу датим функцијама нема једнаких
В) $f_1 = f_2 \neq f_3$ Г) $f_1 \neq f_2 = f_3$ Д) $f_1 = f_3 \neq f_2$ Г)

12. (П) Одредити највећу и најмању вредност функције $f(x) = 4x - 6 - x^2$ на интервалу $[-3, 3]$.

$f_{\min} = f(-3) = -27,\ f_{\max} = f(2) = -2$

13. (П) Колика је најмања вредност функције $f(x) = \sin x + \cos x$ за $x \in [0, \pi]$? -1

14. (П) Колика је највећа вредност функције $f(x) = |2x + 1| + |x - 3| - |5x - 4|$, $x \in \mathbb{R}$?

4.8

15. (П) Решити једначину $||x - 1| - 5| = 6$. Збир решења је 2.

16. (П) Наћи вредност параметра a тако да једначина $|-x^2+5x-4| = ax$ има четири реална решења.

17. Одредити број решења једначине $x^2 = \cos x$. Два решења

18. (П) Колика је максимална запремина ваљка уписаног у лопту полупречника R?

$V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

19. У фигуру ограничену луком криве $2x^2 - y = 6$ и осом Ox уписан је правоугаоник тако да су му два темена на оси Ox. Одредити максималну површину таквог правоугаоника.

$P = 8$

20. (П) Крива која је представљена на графику може бити график функције А) $y = 1 + \frac{2}{x+1}$ Б) $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ В) $y = -1 + \frac{1}{x-1}$ Г) $y = -1 - \frac{2}{x+1}$ Д) $y = 1 - \frac{1}{2(x+1)}$.

Решење је под Д)

1.3 Задаци за вежбу

1. Испитати тачност следећих тврђења:

   а) Функција $f(x) = \sin\frac{x}{5}$ је периодична са периодом 10π;

   б) Функција $f(x) = \sqrt{x}$ је парна;

   в) Ако је функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ '1-1', једначина $f(x) = -2$ има тачно једно решење.

   Да, Не, Не

2. (П) Ако је $f\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = 3x + 2$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, наћи $f(5)$.

3. Ако је $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right), x \neq \pm 1$, наћи $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. 0

4. (П) Ако је $f(2x - 1) = x$, наћи $f(f(x))$. $\frac{x+3}{4}$

5. Ако је $f(2x-1)=x$, одредити $f(f(x))$. $f(f(x))=\frac{x+3}{4}$

6. Ако је $f(x)=2x+|x|$ и $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$, наћи $f(g(x))$. x

7. Које од функција $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $g(x)=\frac{3-x}{2+x}$ и $h(x)=\frac{5x+3}{2x-5}$ су једнаке својој инверзној?
f и h

8. Одредити инверзну функцију функције

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0; \\ 2^x, & x\ge 0. \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1 \\ \log_2 x, & x\ge 1. \end{cases}$$

9. Одредити које су функције међусобно једнаке: $f_1(x)=2\log_2 x$, $f_2(x)=\log_2 x^2$, $f_3(x)=2\log_2|x|$ и $f_4(x)=\frac{1}{\log_x 2}$. $f_2=f_3$

10. Одредити које су функције међусобно једнаке: $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $f_3(x)=\frac{|\cos x|}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ и $f_4(x)=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$. Нема једнаких

11. Одредити које су функције међусобно једнаке: $f_1(x)=2^{\log_2 x}$, $f_2(x)=\log_2 2^x$, $f_3(x)=x$ и $f_4(x)=\left(x\cdot 2^{-\log_2\sqrt{x}}\right)^2$. $f_2=f_3\neq f_1=f_4$

12. Одредити које су функције међусобно једнаке: $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x)=\ln e^{\frac{1}{|x|}}$, $f_3(x)=\sqrt{\frac{|x|}{x^3}}$ и $f_4(x)=\frac{1}{|x|}$. $f_1=f_2=f_4$

13. (П) Колика је највећа вредност функције $f(x)=e^x+e^{-x}$ на сегменту $[-1,2]$? $e^2+\frac{1}{e^2}$

14. Наћи минималну вредност функције $f(x)=x^4-4x^2+8$. $f_{\min}=4$

15. Одредити највећу вредност функције $f(x)=\sin(\sin x)$ за $x\in\mathbb{R}$. $f_{\max}=\sin 1$

16. Колика је најмања вредност функције $f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$ за $0<x<+\infty$? $12\pi-1$

17. Нека је M_1 највећа вредност функције $f_1(x)=(\log_5 6)^{\sin x}$ а M_2 највећа вредност функције $f_2(x)=(\log_6 5)^{\cos x}$. Наћи M_1 и M_2. $M_1=M_2=\log_5 6$

18. (П) Наћи највећу вредност функције $y=\frac{1}{x^2-ax+2}$ која садржи тачку $M\left(-3,\frac{1}{19}\right)$. $\frac{9}{2}$

19. Одредити најмању вредност функције $f(x)=-x^2+3x|x-3|$ на сегменту $[0,4]$.
$f_{\min}=f(3)=-9$

20. Ако су m и M редом најмања и највећа вредност функције $y=x^3-2x|x-2|$ на сегменту $[0,3]$, наћи збир $m+M$. $\frac{527}{27}$

21. (П) Колика је највећа вредност функције $f(x)=|2x-1|-|3x+1|$? $\frac{5}{3}$

22. Одредити скуп вредности функције $f(x)=\frac{2}{1+|x|}$. $(0,2]$

23. (П) Колика је вредност параметра a тако да једначина $|x-1|-|x-2|+|x-3|=a$ има четири решења?

24. За које вредности параметра a једначина $\sin^8 x + \cos^8 x = a$ има реалних решења? $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$

25. Одредити број реалних решења једначине $2^{-x} + x^2 + 2x = 0$. Нема решења

26. Наћи минималну површину тела које је облика правог кружног ваљка завршеног полу-лоптама , чија је запремина 3π. $P_{\min} = 3\pi\sqrt[3]{15}$

27. (П) Колика је висина максималне запремине купе са датом изводницом s? $\frac{s\sqrt{3}}{3}$

28. Одредити висину правилне тростране пирамиде максималне запремине која је уписана у сферу полупречника R. $H = \frac{4R}{3}$

29. Дате су тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, $0 < a < b$. Ако се из тачке $C(x, 0)$, $x > 0$, дуж AB види под максималним углом, наћи x. $x = \sqrt{ab}$

30. (П) Наћи највећу могућа запремина праве купе чија изводница има дужину s. $\frac{2\pi s^3\sqrt{3}}{27}$

31. У полукруг полупречника уписан је трапез максималне површине и квадрат. Колики је однос површина тог трапеза и квадрата? $\frac{15\sqrt{3}}{16}$

32. У праву купу је уписан ваљак са највећим омотачем. Ако је запремина купе V, наћи запремину ваљка. $\frac{3}{8}V$

33. Која од функција $f_1(x) = 3 - \frac{1}{1+x^2}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}$, $f_3(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}$, $f_4(x) = e^{-|x|} + 1$ има график приказан на слици

f_3

34. Који од полинома $P_1(x) = 18(x-1)(x-3)^2$, $P_2(x) = -2(x-1)(x-3)^2$, $P_3(x) = 18(x-1)^2(x-3)$ $P_4(x) = -6(x-1)^2(x-3)$ има график приказан на слици

P_2

35. Ако је $\frac{1}{2}f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, израчунати $f(2)$. 0

36. Дата је функција $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ и низ функција $f_n(x)$ дефинисан помоћу $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, $n = 1, 2, ...$ Наћи $f_{1935}(1)$. $\frac{1}{44}$

37. Нека је за свако x и y

$$f(x+1, y) = f(x, y) + y + 1, \quad f(x, 0) = x, \quad f(x, y) = f(y, x).$$

Наћи $f(12, 5)$. 77

38. Нека $[x]$ означава највећи цео број који је мањи или једнак x. Функција f је дефинисана помоћу $f(x) = [x] + [-x]$. Ако је $n < a < n + 1$ за неки цео број n, колика је вредност $f(a)$? -1

39. Нека функција f задовољава једнакост $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ за све позитивне бројеве x и y. Ако је $f(30) = 20$, наћи вредност $f(40)$. 15