Математички факултет

Универзитет у Београду

Ирационалне једначине и неједначине

Златко Лазовић

29. март 2017.

Глава 1

Ирационалне једначине и неједначине

1.1 Теоријски увод

Под ирационалним једначинама подразумевају се једначине код којих се непозната налази под знаком корена. Такве једначине могу бити сложене, па се могу решити само неке једноставнијег типа. Основна идеја при решавању ирационалних једначина јесте да се елеминише корен (пре свега, степеновањем), односно да се добије еквивалентна једначина у којој се не појављује непозната под кореном.

Степеновањем једначине не добијамо увек еквивалентну једначину, већ можемо добити једначину која поред решења полазне једначине може имати још решења. Једноставан пример за ово је једначина $\sqrt{x} = -1$ која нема реалних решења, а ако је квадрирамо добићемо једначину $x = 1$ која има једно реално решење. Затим, једначина $x+1 = \sqrt{x+7}$, која се квадрирањем своди на једначину $(x+1)^2 = x+7$ чија су решења $x = 2$ и $x = -3$. Међутим, провером можемо видети да $x = 2$ јесте решење полазне једначине, а $x = -3$ није решење.

Скуп допустивих решења је скуп реалних бројева за који су дефинисане поткорене функције у ирационалној једначини.

Посматрајмо ирационалне једначине облика $\sqrt{a(x)} = b(x)$. Видимо да изрази $a(x)$ и $b(x)$ морају бити ненегативни. Квадрирањем добијамо следећу еквиваленцију

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x) = b^2(x) \;\wedge\; a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) \geq 0.$$

Неједнакост $a(x) \geq 0$ није потребно писати јер је последица неједнакости $a(x) = b^2(x)$. Према томе, важи следећа једноставнија еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow\; a(x) = b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{1.1}$$

Ако је ирационална једначина облика $\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)}$, онда важи

$$\sqrt{a(x)} = \sqrt{b(x)} \;\Leftrightarrow\; a(x) = b(x) \;\wedge\; a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{1.2}$$

Можемо закључити, ирационална једначина облика $\sqrt[n]{a(x)} = b(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је једначини $a(x) = [b(x)]^n$, а за паран број $n \in \mathbb{N}$ систему $a(x) = [b(x)]^n$, $b(x) \geq 0$.

Код ирационалних неједначина је мало сложеније решавање. Квадрирање неједнакости није увек дозвољено зато што ако множимо негативним бројем мења се знак неједнакости, а ако множимо позитивним бројем знак једнакости остаје. Једноставан пример за то је тачна неједнакост $-2 < -1$, коју када квадрирамо добијамо нетачну неједнакост $4 < 1$.

Посматрајмо следеће облике неједнакости:

1° $\sqrt{a(x)} \leq b(x)$

Очигледно је да мора бити $b(x) \geq 0$ и $a(x) \geq 0$, па важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \leq b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) \leq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0. \tag{1.3}$$

2° $\sqrt{a(x)} < b(x)$

Десни израз мора бити позитиван, одакле добијамо

$$\sqrt{a(x)} < b(x) \;\Leftrightarrow\; 0 \leq a(x) < b^2(x) \;\wedge\; b(x) > 0. \tag{1.4}$$

3° $\sqrt{a(x)} \geq b(x)$

Овде немамо услов да $b(x)$ мора да буде ненегативно, па неједнакост може бити задовољена и ако је $b(x)$ негативно. Ако је $b(x) \geq 0$, потребно је да важи $a(x) \geq 0$ и $a(x) \geq b^2(x)$, а ако је $b(x) < 0$ довољно је да $a(x) \geq 0$ и неједнакост је задовољена. Према томе, важи следећа еквиваленција

$$\sqrt{a(x)} \geq b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) \geq b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{1.5}$$

4° $\sqrt{a(x)} > b(x)$

Као и у претходном облику, овде важи

$$\sqrt{a(x)} > b(x) \;\Leftrightarrow\; \big(a(x) > b^2(x) \;\wedge\; b(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(a(x) \geq 0 \;\wedge\; b(x) < 0\big). \tag{1.6}$$

Сада ћемо посматрати неједначине у којима се јавља n-ти корен. Неједнацхина $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) < [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$0 \leq f(x) < [g(x)]^n, \;\; g(x) > 0.$$

Неједначина $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$, за непаран број $n \in \mathbb{N}$, еквивалентна је неједначини

$$f(x) > [g(x)]^n,$$

а за паран број $n \in \mathbb{N}$, систему

$$\big(f(x) > [g(x)]^n \;\wedge\; g(x) \geq 0\big) \;\vee\; \big(f(x) \geq 0 \;\wedge\; g(x) < 0\big).$$

1.2 Решени задаци

1.2.1. Решити једначину $\sqrt{7-x} = x-1$.

Решење. Једначина је облика $\sqrt{a(x)} = b(x)$, па на основу (1.1) еквивалентна је следећем систему

$$(x-1)^2 = 7-x \ \wedge \ x-1 \geq 0.$$

Решења прве једначине су $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$, а услов $x \geq 1$ задовољава само решење $x_1 = 3$. Добили смо да је решење ирационалне једначине $x = 3$. $\triangle$

1.2.2. Решити једначину $\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7$.

Решење. Скуп допустивих решења је скуп реалних бројева x за које важи $2x+8 \geq 0$ и $x+5 \geq 0$, дакле $D = [-4, +\infty)$. Пошто је лева страна једначине збир два ненегативна корена, дакле ненегативна, а десна страна позитивна константа, квадрирањем добијамо еквивалентан систем

$$2x+8+2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+x+5 = 49 \ \wedge \ x \in D,$$

односно

$$2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5} = 36-3x \ \wedge \ x \in [-4, +\infty).$$

Овај систем је, слично као (1.1), еквивалентан систему

$$4(2x+8)(x+5) = (36-3x)^2 \ \wedge \ 36-3x \geq 0 \ \wedge \ x \in [-4, +\infty),$$

па и систему

$$x^2 - 288x + 1136 = 0 \ \wedge \ x \leq 12 \ \wedge \ x \in [-4, +\infty).$$

Добијена квадратна једначина има решења $x_1 = 4$ и $x_2 = 284$, али због услова $x \leq 12$, једино решење овог система је $x_1 = 4$. $\triangle$

1.2.3. Решити једначину $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} = 5$.

Решење. Скуп допустивих решења је $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 7x+1 \geq 0 \wedge 3x-18 \geq 0\}$, дакле $D = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geq 6\}$. Лева страна једначине за неке вредности $x \in D$ може бити негативна, па је погодно једначину трансформисати у облик

$$\sqrt{7x+1} = \sqrt{3x-18} + 5, \ x \in D,$$

а затим квадрирати. После сређивања, добија се еквивалентан систем

$$2x-3 = 5\sqrt{3x-18}, \ x \in D,$$

који је, на основу (1.1), даље еквивалентан систему

$$(2x-3)^2 = 25(3x-18) \ \wedge \ x \geq 3/2 \ \wedge \ x \in D,$$

односно

$$4x^2 - 87x + 459 = 0 \wedge x \geq 6.$$

Решења квадратне једначине су $x_1 = 9, x_2 = 51/4$ и оба задовољавају услов $x \geq 6$, па су и решења ирационалне једначине. $\triangle$

1.2.4. Решити једначину $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$.

Решење. Скуп допустивих решења је

$$x^2-x\geq 0 \ \wedge\ 2-x-x^2\geq 0 \ \wedge\ \sqrt{x}-1\geq 0 \ \wedge\ x\geq 0,$$

а одавде

$$x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty) \ \wedge\ x\in[-2,1] \ \wedge\ x\geq 1 \ \wedge\ x\geq 0,$$

што даје $x=1$. Према томе, допустив скуп решења једначине је $D=\{1\}$. Провером можемо утврдити да је то решење једначине.

$\triangle$

1.2.5. Решити једначину $(x^2-2x-3)\sqrt{x^2-7x+6}=0$.

Решење. Скуп допустивих решења једначине је решење неједначине

$$x^2-7x+6\geq 0,$$

а одатле $D=(-\infty,1]\cup[6,+\infty)$. Решење једначине је

$$\big(x^2-2x-3=0 \ \vee\ x^2-7x+6=0\big) \ \wedge\ x\in D,$$

односно

$$x\in\{-1,1,3,6\} \ \wedge\ x\in D.$$

Одавде $x\in\{-1,1,6\}$.

$\triangle$

1.2.6. Решити једначину $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

Решење. Скуп допустивих решења ове једначине је $D=\mathbb{R}$. Степеновањем са три добијамо еквивалентну једначину

$$x+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\right)+2x-3=12x-12.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3}\sqrt[3]{12(x-1)}=3x-3,$$

одакле степеновањем са три добијамо

$$12x(2x-3)(x-1)=27x^3-81x^2+81x-27.$$

Последња једначина је еквивалентна једначини $x^3-7x^2+15x-9=0$. Решења дате једначине су $x=1$, $x=3$. Међутим, неопходна је провера!!! Ако заменимо оба решења у почетну једначину видећемо да је задовољена и тиме смо доказали да су решења тражене једначине $x=1$ и $x=3$. Провера је неопходна, јер смо у току рада заменили $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}$ са $\sqrt[3]{12(x-1)}$, а то не мора да важи. $\triangle$

1.2.7. Решити неједначину $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}=1$

Решење. Скуп допустивих решења је $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Степеновањем са три добијамо еквивалентну једначину

$$x+3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}\right)+x=1.$$

У овој једначини појављује се израз $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}$, који је лева страна почетне једначине, па ћемо га заменити десном страном те једначине. Добијамо

$$3\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}=1-2x,$$

одакле степеновањем са три добијамо

$$27\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=1-6x+12x^2-8x^3.$$

Последња једначина је еквивалентна једначини $8x^3-12x^2+6x+26=0$. Једино реално решење последње једначине је $x=-1$. Образложили смо у претходном задатку да је неопходна провера. Заменом у почетну једначину уверавамо се да $x=-1$ није решење. Према томе, ова једначина нема реалних решења.

$\triangle$

1.2.8. Решити једначину $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4.$

Решење. Скуп допустивих решења једначине је $D=-\frac{35}{2}\leq x\leq\frac{47}{2}$. Уведимо смену $\sqrt[4]{47-2x}=u$, $\sqrt[4]{35+2x}=v$. Добијамо систем једначина $u^4+v^4=82$, $u+v=4$. Ако означимо $uv=t$, трансформацијом леве стране прве једначине имамо $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2=(16-2t)^2-2t^2=2t^2-64t+256$, тако да добијамо квадратну једначину $t^2-32t+87=0$, а одавде $t_1=29$, $t_2=3$. Преостаје још да се реше системи

$$\begin{array}{c} u+v=4\\ uv=3\end{array}\qquad \text{и} \qquad \begin{array}{c} u+v=4\\ uv=29\end{array}.$$

Решимо први систем. Ако из прве једначине изразимо u преко v и убацимо у другу једначину добијамо $(4-v)v=3$, односно $v_1=3, v_2=1$, а $u_1=1$, $u_2=3$. Добили смо уређене парове $(u_1,v_1)=(1,3)$ и $(u_2,v_2)=(3,1)$. Одавде је $x_1=23\in D, x_2=-17\in D$. На сличан начин решавамо и други систем и добијамо једначину $v^2-4v+29=0$ која нема реална решења. Значи, решења тражене једначине су $x_1=23$ и $x_2=-17$. $\triangle$

1.2.9. Решити једначину $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

Решење. Ако уведемо смену $t = 3x^2+5x+1$ долазимо до једначине $\sqrt{t+7}-\sqrt{t} = 1$, чија је област дефинисаности $D_t = [0, +\infty)$. Пребацимо $\sqrt{t}$ на десну страну и добијамо $\sqrt{t+7} = \sqrt{t}+1$, где су обе стране ненегативне. Ако је квадрирамо имамо $3 = \sqrt{t}$, а одавде $t = 9 \in D_t$. Према томе, важи $9 = 3x^2+5x+1$, односно $x_1 = 1, x_2 = -8/3$. △

1.2.10. Решити једначину $\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} = 2$.

Решење. С обзиром да је $x+3+2\sqrt{x+2} = x+2+2\sqrt{x+2}+1 = \left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$ и $x+3-2\sqrt{x+2} = x+2-2\sqrt{x+2}+1 = \left(\sqrt{x+2}-1\right)^2$, дату једначину можемо написати у облику

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2} = 2,$$

односно

$$\left|\sqrt{x+2}+1\right|+\left|\sqrt{x+2}-1\right| = 2.$$

Сменом $t = \sqrt{x+2}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t = [0, +\infty)$, добија се једначина

$$|t+1|+|t-1| = 2.$$

Имајући у виду дефиницију апсолутне вредности, можемо разликовати следеће случајеве:

1. $0 \le t < 1$. У овом случају је $|t+1| = t+1$, $|t-1| = 1-t$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1-t+1 = 2$, односно $2 = 2$. Дакле, скуп решења једначине у овом случају је $[0, 1)$.

2. $t \ge 1$. У овом случају је $|t+1| = t+1$, $|t-1| = t-1$. Једначина је еквивалентна једначини $t+1+t-1 = 2$, односно $2t = 2$. Решење последње једначине је $t = 1$.

Добили смо да је $[0, 1]$ скуп решења једначине $|t+1|+|t-1| = 2$ на $D_t = [0, +\infty)$.

Према томе, скуп решења почетне једначине је скуп решења неједначине $0 \le \sqrt{x+2} \le 1$. Одавде добијемо решење $x \in [-2, -1]$. △

1.2.11. Решити једначину $x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1 = 3x$.

Решење. Скуп допустивих решења је $D_x = [0, +\infty)$. Ако уведемо смену $t = \sqrt{x}$, где је скуп допустивих вредности променљиве t, $D_t = [0, +\infty)$ добићемо следећу једначину по t

$$t^3+t+1 = 3t^2.$$

Решимо ову једначину. Једначина је трећег степена, па то можемо урадити на следећи начин: приметимо да је једно решење $t_1 = 1$, онда поделимо t^3-3t^2+t+1 са $t-1$ и добијамо t^2-2t-1. Према томе, добили смо

$(t-1)(t^2-2t-1)=0$, а одавде $t_1=1$, $t_2=1+\sqrt{2}, t_3=1-\sqrt{2}$. С обзиром да решење t_3 не задовољава услов $t\geq 0$, онда су решења једначине $t_1=1$, $t_2=1+\sqrt{2}$. Вратимо ова решења у смену и добијамо $1=\sqrt{x}$, $1+\sqrt{2}=\sqrt{x}$, одакле је $x_1=1$, $x_2=3+2\sqrt{2}$. △

1.2.12. Решити једначину $\sqrt{x-3}=x+a$, где је a реалан параметар.

Решење. Приликом решавања ове једначине, користићемо графичко представљање одговарајућих функција. Наиме, скицираћемо графике функција $y=\sqrt{x-3}$ и $y=x+a$.

График прве функције добија се транслацијом графика функције $y=\sqrt{x}$ удесно за 3. График друге функције је права паралелна правој $y=x$, а њен тачан положај зависи од вредности параметра a, (слика 1).

Са слике видимо да су могућа четири случаја:

1. када права и крива немају заједничких тачака, па једначина нема решења;
2. када права додирује криву, па једначина има једно решење;
3. када права сече криву у двема тачкама и постоје два решења једначине и
4. када права сече криву само у једној тачки, па је решење једначине јединствено.

Квадрирањем дате једначине, добија се једначина

$$x^2+(2a-1)x+(a^2+3)=0,$$

чија су решења $x_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{-4a-11}}{2}$. Напред наведеним случајевима одговара следеће:

1. ако је $a>-\frac{11}{4}$, решења $x_{1,2}$ нису реална, па дата једначина нема решења;
2. ако је $a=-\frac{11}{4}$, решења се поклапају; ово је случај када права додирује криву, а дата једначина има јединствено решење $x_1=\frac{13}{4}$.
3. ако је $-3\leq a\leq -\frac{11}{4}$, оба решења x_1 и x_2 су и решења полазне једначине; притом је у граничном случају $a=-3$ једно од тих решења једнако 3 (обе стране једначине су једнаке нули);

4. ако је $a < -3$, тада је само решење $x_1 = \frac{1-2a+\sqrt{-4a-11}}{2}$ уједно и решење полазне једначине.

$\triangle$

1.2.13. Решити неједначину $\sqrt{x^2+4x+4} \leq x+6$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} \leq b(x)$ и према (1.3) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) \leq b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша неједначина је еквивалентна систему

$$0 \leq x^2+4x+4 \leq (x+6)^2 \ \wedge \ x+6 \geq 0,$$

односно

$$0 \leq x^2+4x+4 \leq x^2+12x+36 \ \wedge \ x \geq -6.$$

Систем можемо раздвојити и добићемо

$$0 \leq x^2+4x+4 \ \wedge \ x^2+4x+4 \leq x^2+12x+36 \ \wedge \ x \geq -6,$$

а одатле

$$0 \leq x^2+4x+4 \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6.$$

Решење квадратне неједначине $0 \leq x^2+4x+4 = (x+2)^2$ је за свако $x \in \mathbb{R}$. Добили смо систем

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6,$$

који је еквивалентан систему

$$x \geq -4 \ \wedge \ x \geq -6.$$

Решење неједначине је $x \in [-4, +\infty)$. $\triangle$

1.2.14. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (1.4) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) < b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0.$$

Према томе, наша неједначина је еквивалентна систему

$$0 \leq x^2-3x-10 < (8-x)^2 \ \wedge \ 8-x \geq 0,$$

односно

$$0 \leq x^2-3x-10 < 64-16x+x^2 \ \wedge \ x \leq 8.$$

Систем можемо раздвојити и добићемо

$$0 \leq x^2-3x-10 \ \wedge \ x^2-3x-10 < 64-16x+x^2 \ \wedge \ x \leq 8,$$

а одатле
$$0 \le x^2 - 3x - 10 \ \wedge \ x < 74/13 \ \wedge \ x \le 8.$$
Решење квадратне неједначине $0 \le x^2 - 3x - 10$ је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$. Добили смо систем
$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, +\infty) \ \wedge \ x < 74/13 \ \wedge \ x \le 8,$$
који је еквивалентан систему
$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, 74/13) \ \wedge \ x \le 8.$$
Решење неједначине је $x \in (-\infty, -2] \cup [5, 74/13)$. △

1.2.15. Решити неједначину $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} \ge 2x - 2$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} \ge b(x)$ и према (1.5) еквивалентна је систему
$$\big(a(x) \ge b^2(x) \ \wedge \ b(x) \ge 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \ge 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$
Према томе, наша неједначина је еквивалентна систему
$$\big(3x^2 - 2x - 1 \ge (2x-2)^2 \ \wedge \ 2x - 2 \ge 0\big) \ \vee \ \big(3x^2 - 2x - 1 \ge 0 \ \wedge \ 2x - 2 < 0\big),$$
односно
$$\big(-x^2 + 6x - 5 \ge 0 \ \wedge \ x \ge 1\big) \ \vee \ \big(3x^2 - 2x - 1 \ge 0 \ \wedge \ x < 1\big).$$
Решавањем квадратних неједначина добијамо
$$\big(x \in [1, 5] \ \wedge \ x \ge 1\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -1/3] \cup [1, +\infty) \ \wedge \ x < 1\big),$$
затим
$$x \in [1, 5] \ \vee \ x \in \big(-\infty, -1/3\big].$$
Решење ирационалне неједначине је $x \in \big(-\infty, -1/3\big] \cup [1, 5]$. △

1.2.16. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - x - 12} > 7 + x$.

Решење. Ово је неједначина типа $\sqrt{a(x)} > b(x)$ и према (1.6) еквивалентна је систему
$$\big(a(x) > b^2(x) \ \wedge \ b(x) \ge 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \ge 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$
Према томе, почетна неједначина је еквивалентна систему
$$\big(x^2 - x - 12 > (7 + x)^2 \ \wedge \ 7 + x \ge 0\big) \ \vee \ \big(x^2 - x - 12 \ge 0 \ \wedge \ 7 + x < 0\big),$$
односно
$$\big(15x + 61 < 0 \ \wedge \ x \ge -7\big) \ \vee \ \big(x^2 - x - 12 \ge 0 \ \wedge \ x < -7\big).$$

Решење квадратне неједначине $x^2 - x - 12 \geq 0$ је $x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty)$, па добијамо

$$\big(x < -61/15 \ \wedge \ x \geq -7\big) \ \vee \ \big(x \in (-\infty, -3] \cup [4, +\infty) \ \wedge \ x < -7\big),$$

а одавде

$$x \in \big[-7, -61/15\big) \ \vee \ x \in (-\infty, -7).$$

Решење ирационалне неједначине је $x \in (-\infty, -61/15)$. $\triangle$

1.2.17. Решити неједначину $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \frac{1}{2x-1}$.

Решење. Скуп допустивих вредности се налази из следећих услова

$$x + 1 > 0 \ \wedge \ 2x - 1 \neq 0,$$

па је $D = (-1, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$. Неједначина је типа $\sqrt{a(x)} > b(x)$ и према (1.6) еквивалентна је систему

$$\big(a(x) > b^2(x) \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) < 0\big).$$

Према томе, неједначина је еквивалентна систему

$$\left(\frac{1}{x+1} > \frac{1}{(2x-1)^2} \ \wedge \ \frac{1}{2x-1} \geq 0\right) \ \vee \ \left(\frac{1}{x+1} \geq 0 \ \wedge \ \frac{1}{2x-1} < 0\right),$$

односно

$$\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(2x-1)^2} > 0 \ \wedge \ 2x - 1 > 0\right) \ \vee \ \big(x + 1 > 0 \ \wedge \ 2x - 1 < 0\big),$$

а одавде

$$\left(\frac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2} > 0 \ \wedge \ x > \frac{1}{2}\right) \ \vee \ \left(x > -1 \ \wedge \ x < \frac{1}{2}\right).$$

Како је $\left(\frac{x(4x-5)}{(x+1)(2x-1)^2} > 0 \ \wedge \ x > \frac{1}{2}\right) \ \Leftrightarrow \ x > 5/4$, добијамо

$$x > 5/4 \ \vee \ \left(x > -1 \ \wedge \ x < \frac{1}{2}\right).$$

Коначно, решење неједначине је $x \in (-1, 1/2) \cup (5/4, +\infty)$. $\triangle$

1.2.18. Решити неједначину $x - 2x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 2 < 0$.

Решење. Скуп допустивих решења је цео скуп $\mathbb{R}$. Сменом $t = \sqrt[3]{x}$ неједначина се своди на $t^3 - 2t^2 - t + 2 < 0$, где $t \in \mathbb{R}$. Леви израз се може факторисати $t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t+1)(t-1)(t-2)$, па смо добили неједначину $(t+1)(t-1)(t-2) < 0$, а одавде решење $t \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$. Решење почетне неједначине се налази из

$$\sqrt[3]{x} < -1 \ \vee \ 1 < \sqrt[3]{x} < 2,$$

чије је решење $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 8)$. $\triangle$

1.2.19. Решити неједначину $\sqrt{3x-1}-\sqrt{7-x}\leq 2$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$3x-1\geq 0 \ \wedge \ 7-x\geq 0,$$

а то је $D=[1/3,7]$. Лева страна неједначине може бити и негативна, зато $\sqrt{7-x}$ пребацујемо на десну страну и добијамо

$$\sqrt{3x-1}\leq 2+\sqrt{7-x},$$

где су обе стране позитивне. Сада је неједначина еквивалентна систему

$$3x-1\leq \left(2+\sqrt{7-x}\right)^2 \ \wedge \ x\in D,$$

односно

$$3x-1\leq 4+4\sqrt{7-x}+7-x \ \wedge \ x\in D,$$

а одавде

$$\sqrt{7-x}\geq x-3 \ \wedge \ x\in[1/3,7]. \tag{1.7}$$

Решимо прво неједначину $\sqrt{7-x}\geq x-3$. Неједначина је облика $\sqrt{a(x)}\geq b(x)$ и према (1.5) еквивалентна је систему

$$\big(a(x)\geq b^2(x) \ \wedge \ b(x)\geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x)\geq 0 \ \wedge \ b(x)<0\big).$$

Према томе, добијамо систем

$$\big(7-x\geq (x-3)^2 \ \wedge \ x-3\geq 0\big) \ \vee \ \big(7-x\geq 0 \ \wedge \ x-3<0\big),$$

који је еквивалентан систему

$$\big(x^2-5x+2\leq 0 \ \wedge \ x\geq 3\big) \ \vee \ \big(x\leq 7 \ \wedge \ x<3\big),$$

а овај

$$\big(x\in[(5-\sqrt{17})/2,(5+\sqrt{17})/2] \ \wedge \ x\geq 3\big) \ \vee \ \big(x<3\big),$$

чије је решење $x\in\big(-\infty,\big(5+\sqrt{17}\big)/2\big]$. Тиме смо добили решење неједначине $\sqrt{7-x}\geq x-3$. То решење убацимо у систем 1.7 и добијамо

$$x\in\big(-\infty,\big(5+\sqrt{17}\big)/2\big] \ \wedge \ x\in\big[1/3,7\big].$$

Решење почетне ирационалне неједначине је $x\in\big[1/3,\big(5+\sqrt{17}\big)/2\big]$.

△

1.2.20. Решити неједначину $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

Решење. Скуп допустивих вредности x је одређен условима

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 \ \land \ \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

Први услов је еквивалентан са $x \in [-1,0) \cup [1,+\infty)$, а други са $x \in (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$. Следи, $D = [-1,0) \cup [1,+\infty)$. На скупу D десна страна неједнакости је ненегативна, па израз $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ пребацујемо на десну страну и добијамо

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x} + \sqrt{1-\frac{1}{x}},$$

где су и лева и десна страна ненегативне за сваку вредност $x \in D$. Квадрирањем добијамо еквивалентну неједначину

$$x - \frac{1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2} + 2 \cdot \frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x},$$

одакле је

$$2 \cdot \frac{x-1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}} < x - 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

Претпоставимо да је $x \neq 1$. Тада је $\frac{x-1}{x}$ позитивно на D, па се знак неједнакости неће променити ако је поделимо са овим изразом и добијамо

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} < \frac{x^2-x+1}{2x}, \ \ x \in D \backslash \{1\}.$$

Неједнакост је облика $\sqrt{a(x)} < b(x)$ и према (1.4) еквивалентна је систему

$$0 \leq a(x) < b^2(x) \ \land \ b(x) > 0,$$

што је у нашем случају

$$0 \leq 1 - \frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \land \ \frac{x^2-x+1}{2x} > 0 \ \land \ x \in D \backslash \{1\}.$$

Ово је еквивалентно са следећим

$$1 - \frac{1}{x} < \left(\frac{x^2-x+1}{2x}\right)^2 \ \land \ x \in (1,+\infty),$$

а одатле и са

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 > 0 \ \land \ x \in (1,+\infty).$$

С обзиром да је $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^2-x-1)^2$, имамо систем

$$(x^2-x-1)^2 > 0 \ \land \ x \in (1,+\infty),$$

чије је решење $x \in \big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$.

Остало је да још проверимо да ли $x=1$ задовољава неједнакост. Заменом ове вредности у почетну неједнакост закључујемо да не припада скупу решења, па је коначно решење $\big(1,(1+\sqrt{5})/2\big) \cup \big((1+\sqrt{5})/2,+\infty\big)$. △

1.2.21. Решити неједначину $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

Решење. Неједначина $a(x)b(x) \geq 0$ еквивалентна је систему

$$\big(a(x) \geq 0 \ \wedge \ b(x) \geq 0\big) \ \vee \ \big(a(x) \leq 0 \ \wedge \ b(x) \leq 0\big).$$

Према томе, неједначина је еквивалентна систему

$$\big(x-1 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \geq 0\big) \ \vee \ \big(x-1 \leq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2-x-2} \leq 0\big),$$

из чега следи

$$\big(x \geq 1 \ \wedge \ x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)\big) \ \vee \ \big(x \leq 1 \ \wedge \ x \in \{-1,2\}\big),$$

а одавде

$$x \in [2,+\infty) \ \vee \ x = -1.$$

Решење неједначине је $x \in \{-1\} \cup [2,+\infty)$. △

1.2.22. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{(x+2)(x^2-8x+16)} \geq 0$.

Решење. Неједначина је еквивалентна следећем систему неједначина

$$x^2-2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad (x+2)(x^2-8x+16) > 0,$$

а одавде

$$x^2-2x-3 \geq 0 \wedge \left[\big(x+2>0 \wedge (x-4)^2>0\big) \vee \big(x+2<0 \wedge (x-4)^2<0\big)\right],$$

што даје

$$x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) \ \ \wedge \ \ x \in (-2,4) \cup (4,+\infty).$$

Решење неједначине је $x \in (-2,-1] \cup [3,4) \cup (4,+\infty)$. △

1.3 Задаци за вежбу

1.3.23. Одредити решења једначине $\sqrt{x+2} = x-1$.

Решење. $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ △

1.3.24. Решити једначину $\sqrt{x^4-4x-16} = 2-x$.

Решење. $x = -\sqrt{5}$. △

1.3.25. Решити једначину $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$.

Решење. $x_1 = 4, x_2 = 11$. △

1.3.26. Решити једначину $\sqrt{y^2+4y+8}+\sqrt{y^2+4y+4} = \sqrt{2(y^2+4y+6)}$.

Решење. $y=-2$. △

1.3.27. Решити једначину $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решење. $5\le x\le 10$. △

1.3.28. Решити једначину $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

Решење. $x_1=8, x_{2,3}=8\pm\frac{12}{7}\sqrt{21}$. △

1.3.29. Решити једначину $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$.

Решење. $x=-1$. △

1.3.30. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$.

Решење. $x=81$. △

1.3.31. Решити једначину $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

Решење. Ако је $a\neq 0$, онда је $x_1=0, x_2=\frac{63}{65}a$. Ако је $a=0$, онда је јединствено решење $x=0$. △

1.3.32. Решити једначину $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Решење. $x_1=16, x_2=81$. △

1.3.33. Решити једначину $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

Решење. $x=8$. △

1.3.34. Решити једначину $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

Решење. $x=2^{10}$. △

1.3.35. Решити једначину $\sqrt{x^2-2|x|+1}=1$.

Решење. $x\in\{0,2,-2\}$. △

1.3.36. Решити неједначину $\sqrt{x+78}<x+6$.

Решење. $x>3$. △

1.3.37. Решити неједначину $\sqrt{x^2-3x+2}\le 2x-1$.

Решење. $x\in\big[\big(1+\sqrt{13}\big)/6,1\big]\cup[2,+\infty)$. △

1.3.38. Решити неједначину $\sqrt{-x^2+x+6}>1-x$.

Решење. $-1<x\le 3$. △

1.3.39. Решити неједначину $\sqrt{3x^2-2x-1}\ge 2x-2$.

Решење. $x \in \big(-\infty, -1/3\big] \cup [1,5]$. $\triangle$

1.3.40. Решити неједначину $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решење. $x \in \big[0, \big(3-\sqrt{5}\big)/6\big)$. $\triangle$

1.3.41. Решити неједначину $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} > \sqrt{4x-3}$.

Решење. $x > 3$. $\triangle$

1.3.42. Решити неједначину $\frac{1}{x}(1 - \sqrt{1-9x^2}) < 1$.

Решење. $x \in \big[-1/3, 0\big) \cup \big(0, 1/5\big)$. $\triangle$

1.3.43. Решити неједначину $\sqrt{4 - \sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$.

Решење. $x \in \big(\big(\sqrt{13}-5\big)/2, 1\big]$. $\triangle$

1.3.44. Решити неједначину $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq 0,5$.

Решење. $x \in \big(-1, 1-\sqrt{2}\,\big] \cup \big(1, \sqrt{2}\,\big]$. $\triangle$

1.3.45. Решити неједначину $\dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-1} \leq 6\sqrt{x}$.

Решење. $x \in [0,1) \cup \big[\frac{49}{25}, +\infty\big]$. $\triangle$

1.3.46. Решити неједначину $\sqrt{x} + \sqrt[3]{1-x} > 1$.

Решење. $x \in (0,1) \cup (9, +\infty)$. $\triangle$