

1. Нека је дата функција на Бореловој σ алгебри \mathfrak{B} на \mathbb{R} ,

$$\mu(A) = m(A \cap [0, 1]) + \delta_0(A) + \delta_{\frac{1}{2}}(A) + \delta_1(A) \quad \text{за свако } A \in \mathfrak{B},$$

где је m Лебегова мера и δ Диракова мера, $\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A; \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$

а) Доказати да је μ мера на \mathfrak{B} .

б) Доказати да је свака функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Борел мерљива на \mathbb{Q} и израчунати $\int_{\mathbb{Q}} f d\mu$.

в) Израчунати $\int_{\mathbb{R}} x e^{x^2} d\mu$.

г) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ конвергира μ -скоро свуда на \mathbb{R} и наћи $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} d\mu$.

2. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-x)n^2 f(x)}{2+n^6(1-x)^4} dx$, где је f непрекидна функција на $[0, 1]$.

3. Израчунати $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{dx}{2y \sin \frac{x}{y}}$.

4. Израчунати $\int_0^1 \ln(1 - e^{-x}) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$.

1. Нека је дата функција на Бореловој σ алгебри \mathfrak{B} на \mathbb{R} ,

$$\mu(A) = m(A \cap [0, 1]) + \delta_0(A) + \delta_{\frac{1}{2}}(A) + \delta_1(A) \quad \text{за свако } A \in \mathfrak{B},$$

где је m Лебегова мера и δ Диракова мера, $\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A; \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$

а) Доказати да је μ мера на \mathfrak{B} .

б) Доказати да је свака функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Борел мерљива на \mathbb{Q} и израчунати $\int_{\mathbb{Q}} f d\mu$.

в) Израчунати $\int_{\mathbb{R}} x e^{x^2} d\mu$.

г) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ конвергира μ -скоро свуда на \mathbb{R} и наћи $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} d\mu$.

2. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(1-x)n^2 f(x)}{2+n^6(1-x)^4} dx$, где је f непрекидна функција на $[0, 1]$.

3. Израчунати $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{dx}{2y \sin \frac{x}{y}}$.

4. Израчунати $\int_0^1 \ln(1 - e^{-x}) dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2}$.