Први колоквијум из Теорије мере и интеграције **22.4.2018.**

1. Нека је J произвољна фамилија подскупова од X, $\mathcal{U}_J$ је минимална алгебра која садржи J и нека је $\mathcal{J}$ фамилија оних скупова из $\mathcal{U}_J$ за које важи да постоји коначна подфамилија $J_A \subset J$ тако да $A \in \mathcal{U}_{J_A}$, односно

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{U}_J |\ \text{постоји коначна подфамилија } J_A \subset J, A \in \mathcal{U}_{J_A}\},$$

($\mathcal{U}_{J_A}$ је минимална алгебра која садржи J_A).

   а) Доказати да је $\mathcal{J}$ алгебра на X.
   б) Доказати да за сваки скуп из $\mathcal{U}_J$ важи да постоји коначна подфамилија $J_A \subset J$ тако да $A \in \mathcal{U}_{J_A}$.
   в) Доказати да је $\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J} = \mathcal{U}_J$.

2. Нека је дат низ тачака $x_n = \left(a_n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)$ у равни, при чему је (a_n), $a_1 \geq 1$ строго растући низ реалних бројева и нека је дата функција $\mu\colon P(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty]$, $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \chi_A(x_n)$ (χ_A је карактеристична функција скупа A).

   а) Доказати да је μ мера на $P(\mathbb{R}^2)$.
   б) Наћи $\mu([0,1]\times\mathbb{R}), \mu(\mathbb{R}\times(1,3])$ и $\mu(C\times C)$ у зависности од низа (a_n), где је C Канторов скуп.
   в) Доказати да мера μ има особину да је коначна за сваки ограничен скуп ако и само ако a_n дивергира.

Први колоквијум из Теорије мере и интеграције **22.4.2018.**

1. Нека је J произвољна фамилија подскупова од X, $\mathcal{U}_J$ је минимална алгебра која садржи J и нека је $\mathcal{J}$ фамилија оних скупова из $\mathcal{U}_J$ за које важи да постоји коначна подфамилија $J_A \subset J$ тако да $A \in \mathcal{U}_{J_A}$, односно

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{U}_J |\ \text{постоји коначна подфамилија } J_A \subset J, A \in \mathcal{U}_{J_A}\},$$

($\mathcal{U}_{J_A}$ је минимална алгебра која садржи J_A).

   а) Доказати да је $\mathcal{J}$ алгебра на X.
   б) Доказати да за сваки скуп из $\mathcal{U}_J$ важи да постоји коначна подфамилија $J_A \subset J$ тако да $A \in \mathcal{U}_{J_A}$.
   в) Доказати да је $\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J} = \mathcal{U}_J$.

2. Нека је дат низ тачака $x_n = \left(a_n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)$ у равни, при чему је (a_n), $a_1 \geq 1$ строго растући низ реалних бројева и нека је дата функција $\mu\colon P(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty]$, $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \chi_A(x_n)$ (χ_A је карактеристична функција скупа A).

   а) Доказати да је μ мера на $P(\mathbb{R}^2)$.
   б) Наћи $\mu([0,1]\times\mathbb{R}), \mu(\mathbb{R}\times(1,3])$ и $\mu(C\times C)$ у зависности од низа (a_n), где је C Канторов скуп.
   в) Доказати да мера μ има особину да је коначна за сваки ограничен скуп ако и само ако a_n дивергира.