Писмени испит из Теорије мере и интеграције **27.6.2018.**

1. Нека је $\mathfrak{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$ и нека је B Лебегова мера. Нека је дата функција

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to [0,+\infty),\ \mu(A) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} 2^{|n-k|} m(A \cap A_{n,k}),$$

при чему је $A_{n,k} = [n, n+1) \times [k, k+1)$.

а) Доказати да је μ мера на $\mathfrak{M}$.

б) Израчунати $\int\limits_A f \mathrm{d}\mu$, где је $A = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 8\}$ и $f(x,y) = \chi_{\mathbb{R}\times[0,3]}$.

в) Израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}\mu$, где је $f = \chi_{[0,2018]\times[0,2018]}$.

2. Нека је дат низ функција $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{(1+n^2x^2)(\cos x + x^3 + x)}$. Да ли постоји мерљива функција $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ која задовољава следеће особине

а) $\int\limits_{[0,+\infty)} g(x)\mathrm{d}m(x) < +\infty$;

б) Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $|f_n(x)| \leq g(x)$ за свако $n \geq n_0$ и за свако $x \geq 0$?

3. Доказати једнакост $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{1+e^{-\frac{x}{3}}} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

4. Нека низ (f_n) конвергира ка f у $L^p[a,b]$ и низ (g_n) конвергира ка g у $L^q[a,b]$, при чему је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

а) Показати да важи $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

б) Ако низ (c_n) у $[a,b]$ конвергира ка c, тада $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^{c_n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{c} f(x)\mathrm{d}x$.

Писмени испит из Теорије мере и интеграције **27.6.2018.**

1. Нека је $\mathfrak{B}$ Борелова σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$ и нека је B Лебегова мера. Нека је дата функција

$$\mu\colon \mathfrak{M} \to [0,+\infty),\ \mu(A) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} 2^{|n-k|} m(A \cap A_{n,k}),$$

при чему је $A_{n,k} = [n, n+1) \times [k, k+1)$.

а) Доказати да је μ мера на $\mathfrak{M}$.

б) Израчунати $\int\limits_A f \mathrm{d}\mu$, где је $A = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + (y-3)^2 \leq 8\}$ и $f(x,y) = \chi_{\mathbb{R}\times[0,3]}$.

в) Израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}^2} f \mathrm{d}\mu$, где је $f = \chi_{[0,2018]\times[0,2018]}$.

2. Нека је дат низ функција $f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{(1+n^2x^2)(\cos x + x^3 + x)}$. Да ли постоји мерљива функција $g\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ која задовољава следеће особине

а) $\int\limits_{[0,+\infty)} g(x)\mathrm{d}m(x) < +\infty$;

б) Постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $|f_n(x)| \leq g(x)$ за свако $n \geq n_0$ и за свако $x \geq 0$?

3. Доказати једнакост $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{1+e^{-\frac{x}{3}}} = 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

4. Нека низ (f_n) конвергира ка f у $L^p[a,b]$ и низ (g_n) конвергира ка g у $L^q[a,b]$, при чему је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

   а) Показати да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)g_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

   б) Ако низ (c_n) у $[a,b]$ конвергира ка c, тада $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^{c_n} f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$.