PRVI KOLOKVIJUM iz TMI 22.4.2018.

$\boxed{1.}$ $\mathcal{J}$ PROIZVOLJNA FAMILIJA PODSKUPOVA OD X

$\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ MINIMALNA ALGEBRA KOJA SADRŽI $\mathcal{J}$

$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}} \mid$ POSTOJI KONAČNA PODFAMILIJA $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{J}, A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}\}$

$\mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}$ MINIMALNA ALGEBRA KOJA SADRŽI $\mathcal{J}_A$

a) POTREBNO JE DOKAZATI DA JE $\mathcal{S}$ ALGEBRA NA X

POTREBNO JE DOKAZATI SLEDEĆE OSOBINE

1) $X \in \mathcal{S}$

2) AKO $A \in \mathcal{S}$, ONDA $A^c \in \mathcal{S}$

3) AKO $A, B \in \mathcal{S}$, ONDA $A \cup B \in \mathcal{S}$

1) DA BI X PRIPADAO FAMILIJI $\mathcal{S}$ POTREBNO JE DA $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ I DA POSTOJI KONAČNA PODFAMILIJA $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{J}$ TAKO DA $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_X}$

1.1. $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ ZATO ŠTO JE $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ ALGEBRA NA X

1.2. POTREBNO JE NAĆI KONAČNU PODFAMILIJU $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{J}$ TAKO DA $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_X}$

$\mathcal{J}$ JE NEPRAZNA FAMILIJA I POSTOJI $E \in \mathcal{J}$

AKO UZMEMO $\mathcal{J}_X = \{E\}$ (KONAČNA PODFAMILIJA JER SADRŽI SAMO JEDAN SKUP)

ONDA VAŽI $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{J}$ I $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_X}$ (OVO VAŽI JER JE $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_X}$ ALGEBRA NA X)

SVAKA ALGEBRA NA X SADRŽI X

2) NEKA $A \in \mathcal{S}$. TADA $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ I POSTOJI $\mathcal{J}_A \subset \mathcal{J}$ KONAČNA PODFAMILIJA TAKO DA $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}$

DA BI A^c PRIPADAO FAMILIJI $\mathcal{S}$ POTREBNO JE DA $A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ I DA POSTOJI KONAČNA PODFAMILIJA $\mathcal{J}_{A^c} \subset \mathcal{J}$ TAKO DA $A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_{A^c}}$

2.1. AKO $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$, ONDA, NA OSNOVU OSOBINE ALGEBRE $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$, $A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$

2.2. ZA $\mathcal{J}_{A^c}$ UZEĆEMO UPRAVO $\mathcal{J}_A$

$\mathcal{J}_{A^c}$ JE KONAČNA JER JE $\mathcal{J}_A$ KONAČNA

S OBZIROM DA $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}$, VAŽI $A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}$ (OSOBINA ALGEBRE $\mathcal{U}_{\mathcal{J}_A}$), PA NA OSNOVU TOGA KAKO SMO IZABRALI $\mathcal{J}_{A^c} = \mathcal{J}_A$, VAŽI $A^c \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}_{A^c}}$

3) NEKA $A, B \in \mathcal{S}$. DA LI $A \cup B \in \mathcal{S}$?

POTREBNO JE DA DOKAŽEMO DA

3.1. $A \cup B \in \mathcal{U}_J$ i

3.2. POSTOJI KONAČNA PODFAMILIJA $J_{A\cup B} \subset J$ TAKO DA $A \cup B \in \mathcal{U}_{J_{A\cup B}}$

3.1. $A \in \mathcal{S}$ i $B \in \mathcal{S}$.

ODATLE SLEDI DA $A \in \mathcal{U}_J$ i $B \in \mathcal{U}_J$, PA NA OSNOVU OSOBINE ALGEBRE $\mathcal{U}_J$ IMAMO $A \cup B \in \mathcal{U}_J$

3.2. S OBZIROM DA $A, B \in \mathcal{S}$, POSTOJE KONAČNE PODFAMILIJE J_A i J_B TAKO DA $A \in \mathcal{U}_{J_A}$ i $B \in \mathcal{U}_{J_B}$

PODFAMILIJU $J_{A\cup B}$ UZEĆEMO DA JE JEDNAKA $J_A \cup J_B$

$J_{A\cup B} \subset J$ (JER SU i $J_A \subset J$ i $J_B \subset J$)

$J_{A\cup B}$ JE KONAČNA JER SU J_A i J_B KONAČNE

OSTALO JE JOŠ DA SE POKAŽE DA $A \cup B \in \mathcal{U}_{J_{A\cup B}}$

IZ $J_A \subset J_{A\cup B}$ SLEDI DA $\mathcal{U}_{J_{A\cup B}}$ SADRŽI J_A (JER SADRŽI $J_{A\cup B}$), A IZ MINIMALNOSTI ALGEBRE $\mathcal{U}_{J_A}$ (MINIMALNA KOJA SADRŽI J_A) VAŽI $\mathcal{U}_{J_A} \subset \mathcal{U}_{J_{A\cup B}}$

SLIČNO DOKAŽEMO i DA $\mathcal{U}_{J_B} \subset \mathcal{U}_{J_{A\cup B}}$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{U}_{J_A} \subset \mathcal{U}_{J_{A\cup B}} \\ B \in \mathcal{U}_{J_B} \subset \mathcal{U}_{J_{A\cup B}} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{U}_{J_{A\cup B}} \quad (\text{JER JE } \mathcal{U}_{J_{A\cup B}} \text{ ALGEBRA})$$

b) POTREBNO JE DOKAZATI DA JE $\mathcal{S} = \mathcal{U}_J$

OČIGLEDNO JE $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}_J$ (IZ DEFINICIJE)

OSTALO JE JOŠ DA DOKAŽEMO DA VAŽI $\mathcal{U}_J \subset \mathcal{S}$

DOKAZAĆEMO DA $J \subset \mathcal{S}$

NEKA JE $E \in J$. TADA $E \in \mathcal{U}_J$ (JER $\mathcal{U}_J$ SADRŽI J)

NEKA JE $J_E = \{E\}$ KONAČNA (JEDNOČLANA) PODFAMILIJA OD J.

TADA JE $E \in \mathcal{U}_{J_E}$ OČIGLEDNO

PREMA TOME, $J \subset \mathcal{S}$. IZ MINIMALNOSTI ALGEBRE $\mathcal{U}_J$ (MINIMALNA ALGEBRA KOJA SADRŽI J) i NA OSNOVU TOGA ŠTO JE $\mathcal{S}$ ALGEBRA (DEO POD a)) SLEDI DA JE $\mathcal{U}_J \subset \mathcal{S}$

c)

$\mathcal{U}_J \subset \mathcal{U}_{\mathcal{U}_J}$ (OČIGLEDNO, $\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J}$ SADRŽI $\mathcal{U}_J$ IZ DEFINICIJE $\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J}$)

$\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J} \subset \mathcal{U}_J$ ($\mathcal{U}_{\mathcal{U}_J}$ MINIMALNA ALGEBRA KOJA SADRŽI $\mathcal{U}_J$; $\mathcal{U}_J$ ALGEBRA I SADŽI $\mathcal{U}_J$)

$\boxed{2.}$ $X_n = \left(a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)$, (a_n), $a_1 \geq 1$ STROGO RASTUĆI NIZ

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to [0,+\infty]$, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(X_n)$ $\quad \chi_A$ KARAKTERISTIČNA F-JA SKUPA A

a) $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \quad \mu(A) \geq 0$

1) $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_\emptyset(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \quad , \chi_\emptyset(X_n) = 0$

2) NEKA (A_n) NIZ MEĐUSOBNO DISJUNKTNIH SKUPOVA U $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}(X_n) \overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_k}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$*$ $\quad \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}(X_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(X_n)$

$X_n \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow X_n \in A_i$ ZA NEKO i

$X_n \notin A_j$ ZA $j \neq i$ (JER SU A_k MEĐUSOBNO DISJUNKTNI)

$\chi_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}(X_n) = 1$ JER $X_n \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}(X_n) = \underbrace{\chi_{A_i}(X_n)}_{=1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} \underbrace{\chi_{A_k}(X_n)}_{=0} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} 0 = 1$$

$X_n \notin \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \forall k \quad X_n \notin A_k$

$\chi_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}(X_n) = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\chi_{A_k}(X_n)}_{=0} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

b) $\mu([0,1]\times\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_n)$

$x_1 = (a_1, 1)$

$x_n = (a_n, (1+\frac{1}{n})^n - 1)$, $n \geq 2$

$a_n > a_1 \geq 1$

$x_n \notin [0,1]\times\mathbb{R}$ za $n \geq 2$

$$\mu([0,1]\times\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_n) = \chi_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \overset{0}{\chi_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_n)} = \chi_{[0,1]\times\mathbb{R}}(x_1)$$

AKO JE $a_1 = 1$, ONDA $x_1 \in [0,1]\times\mathbb{R}$ i $\mu([0,1]\times\mathbb{R}) = 1$

AKO JE $a_1 > 1$, ONDA $x_1 \notin [0,1]\times\mathbb{R}$ i $\mu([0,1]\times\mathbb{R}) = 0$

$$\mu(\mathbb{R}\times(1,3]) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\mathbb{R}\times(1,3]}(x_n) = \chi_{\mathbb{R}\times(1,3]}(x_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \chi_{\mathbb{R}\times(1,3]}(x_n) = 0 + \sum_{n=2}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$b_n = (1+\frac{1}{n})^n - 1$

$b_1 = 1$. $b_2 = \frac{5}{4}$, ... $b_n \nearrow e-1 \in (1,3]$

$x_1 \notin \mathbb{R}\times(1,3]$ JER $b_1 \notin (1,3]$ $\quad \chi_{\mathbb{R}\times(1,3]}(x_1) = 0$

$x_n \in \mathbb{R}\times(1,3]$ JER $b_n \in (1,3]$ $\forall n \geq 2$ $\quad \chi_{\mathbb{R}\times(1,3]}(x_n) = 1$

$$\mu(C\times C) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{C\times C}(x_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \overset{0}{\chi_{C\times C}(x_n)} + \chi_{C\times C}(x_1) = \sum_{n=2}^{+\infty} 0 + \chi_{C\times C}(x_1) = \chi_{C\times C}(x_1)$$

$x_1 = (a_1, 1)$ AKO JE $a_1 = 1$, ONDA $x_1 = (1,1) \in C\times C$

AKO JE $a_1 > 1$, ONDA $x_1 = (a_1, 1) \notin C\times C$

$x_n = (a_n, b_n)$

$a_n > a_1 \geq 1 \Rightarrow \forall n \geq 2 \; a_n > 1 \Rightarrow x_n = (a_n, b_n) \notin C\times C$

AKO JE $a_1 = 1$, ONDA $\mu(C\times C) = \chi_{C\times C}(x_1) = 1$

AKO JE $a_1 > 1$, ONDA $\mu(C\times C) = \chi_{C\times C}(x_1) = 0$

c) $\Rightarrow$) PRETPOSTAVIMO DA ZA SVAKI OGRANIČEN SKUP A VAŽI $\mu(A) < +\infty$

NIZ a_n JE STROGO RASTUĆI.

AKO NIZ a_n KONVERGIRA (RECIMO $\lim_{n\to\infty} a_n = a$), ONDA ZA SKUP

$A = [1, a] \times [1, e-1]$ (KOJI JE OGRANIČEN) VAŽI

$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$! KONTRADIKCIJA

PREMA TOME, NIZ a_n DIVERGIRA ($\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$)

$\Leftarrow$) PRETPOSTAVIMO DA NIZ a_n DIVERGIRA ($\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$)

NEKA JE A OGRANIČEN SKUP

POSTOJI $M > 0$ TAKO DA $A \subset [-M, M] \times [-M, M]$

$\mu(A) \leq \mu([-M,M]\times[-M,M]) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-M,M]\times[-M,M]}(x_n)$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; a_n > M \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \; x_n \notin [-M,M]\times[-M,M]$

$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[-M,M]\times[-M,M]}(x_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \chi_{[-M,M]\times[-M,M]}(x_n) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 1 = n_0 < +\infty$