Задатак 0.1. Израчунати интеграле: а) $\int\limits_0^{\frac{9\pi^2}{4}} \left|\sin\sqrt{x}\right| dx$; б) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$.

Решење. а)

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{9\pi^2}{4}} \left|\sin\sqrt{x}\right| dx &= \begin{pmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{pmatrix} = 2\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} t\left|\sin t\right| dt = 2\int\limits_0^{\pi} t\left|\sin t\right| dt + 2\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} t\left|\sin t\right| dt \\
&= 2\int\limits_0^{\pi} t\sin t dt - 2\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} t\sin t dt = \begin{pmatrix} u=t \ \Rightarrow \ du=dt \\ dv=\sin t \ \Rightarrow \ v=-\cos t \end{pmatrix} \\
&= 2\left(-t\cos t|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos t dt\right) - 2\left(-t\cos t|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t dt\right) \\
&= 2\left(\pi+\sin t|_0^{\pi}\right) - 2\left(-\pi+\sin t|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right) = 2\pi+2\pi+2 = 4\pi+2.
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x} &= \begin{pmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t^2}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4t^2+1} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{arctg}(2t)+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x)+C.
\end{aligned}$$

△

Задатак 0.2. Нека је дат круг $x^2+y^2\le 8$ и парабола $y^2=2x$.

а) Парабола дели круг на два дела. У којем односу су површине тих делова?

б) Наћи запремину тела које се добија ротацијом мањег дела круга око x-осе.

Решење. а)

$$P_1 = 2\int\limits_0^2 \sqrt{2x}dx + 2\int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}dx = 2I_1+2I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_0^2 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3},$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}dx = \begin{pmatrix} x=\sqrt{8}\sin t \\ dx=\sqrt{8}\cos t dt \end{pmatrix} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2 x dx = 8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx \\
&= 4\left.\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \pi-2,
\end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{16}{3} + 2\pi - 4,$$

$$P_2 = 8\pi - \frac{16}{3} - 2\pi + 4 = 6\pi - \frac{4}{3},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{16}{3} + 2\pi - 4}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{16 + 6\pi - 12}{18\pi - 4} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

б)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{2x}\right)^2 dx + \pi \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{8 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 2x dx + \pi \int_2^{2\sqrt{2}} (8 - x^2) dx \\
&= \pi x^2 |_0^2 + \pi \left(8x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^{2\sqrt{2}} = 4\pi + \pi \left(16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 16 + \frac{8}{3}\right) \\
&= \pi \left(16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 12 + \frac{8}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(8\sqrt{2} - 7\right)
\end{aligned}$$

$\triangle$

Задатак 0.3. Испитати апсолутну и обичну конвергенцију редова:

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n + (-1)^n}\right)$.

Решење. а) Низ парцијалних сума је

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m} \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right) = \left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1}\right) + \left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt[4]{m+1} - \sqrt[4]{m}\right) \\
&= \sqrt[4]{m+1} - 1,
\end{aligned}$$

па је

$$\lim_{m\to+\infty} S_m = \lim_{m\to+\infty} \left(\sqrt[4]{m+1} - 1\right) = +\infty.$$

Према томе, ред дивергира.

б) Испитајмо апсолутну конвергенцију. Имамо асимптотско понашање

$$|a_n| = \left|(-1)^{n-1} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}\right| = n^2 \sin\frac{\pi}{3^n} \sim \frac{\pi n^2}{3^n}.$$

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$ конвергира на основу Кошијевог критеријума јер је

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

одакле ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}$ апсолутно конвергира.

в) Низ $a_n = \frac{1}{n^2}$ монотоно тежи нули, па ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума.

На основу асимптотског понашања

$$\frac{1}{n+(-1)^n} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} \sim \frac{1}{n}$$

ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+(-1)^n}$ дивергира.

Према томе, ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n+(-1)^n}\right)$ дивергира. Одаттле ред апсолутно не конвергира. △

Задатак 0.4. *Решење.* Нека је дат низ функција $f_n(x) = nx^n(1-x),\ n \in \mathbb{N}$.

а) Испитати обичну конвергенцију низа функција на $[0,1]$.

б) Испитати равномерну конвергенцију низа функција на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

в) Испитати равномерну конвергенцију низа функција на $[0,1]$.

а) Нека је $x \in (0,1)$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx^n(1-x) = 0$, јер x^n "брже" тежи нули него што n иде у $+\infty$, то јест $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = 0$. За $x \in \{0,1\}$ очигледно је $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Према томе, низ функција f_n обично конвергира ка функцији $f \equiv 0$.

б)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} nx^n(1-x).$$

Из

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (nx^n(1-x))' = n(x^n(1-x))' = n(nx^{n-1}(1-x) - x^n) = n(nx^{n-1} - nx^n - x^n) \\ &= n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) \end{aligned}$$

закључујемо да је f_n растућа на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, односно на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, одакле је

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2},$$

па је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Низ функција равномерно конвергира на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

в) Функција f_n је опадајућа на $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$, а растућа на $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, па је

$$\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1},$$

а одавде

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Низ функција не конвергира равномерно на $[0,1]$. △