Математички факултет

Универзитет у Београду

Аритметички и геометријски низови

Златко Лазовић

29. март 2017.

Глава 1

Аритметички и геометријски низови

1.1 Теоријски увод

Аритметички низ је низ реалних бројева код којег се сваки следећи члан низа добија од претходног додавањем једног истог броја d. Број d се назива разликом тог низа. Код сваког низа n-ти члан ћемо означити са $a_n,\ n \in \mathbb{N}$. Пример једног аритметичког низа је низ $2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$ Код овог низа разлика је $d = 3$ и први члан $a_1 = 2$.

Дакле, аритметички низ задовољава релацију

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

У аритметичком низу (a_n) са првим чланом a_1 и разликом d важи

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \tag{1.1}$$

за сваки природан број n.

Важи и следећа једнакост

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},\ k < n \qquad (k, n \in \mathbb{N}).$$

Специјално за $k = 1,\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $(n > 1)$.

Збир првих n чланова аритметичког низа са првим чланом a_1 и разликом d износи

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{1.2}$$

Геометријски низ је низ код којег се сваки члан низа, почевши од другог, добија од претходног множењем једним истим бројем q $(q \neq 0)$. Број q је количник тог геометријског низа. Пример једног геометријског низа је низ

$3, 12, 48, 192, 768, \ldots$ Код овог низа количник је $q = 4$ и први члан $b_1 = 3$. Дакле, геометријски низ задовољава релацију

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \ \ n = 1, 2, 3 \ldots$$

У геометријском низу (b_n) са првим чланом b_1 и количником q важи

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \tag{1.3}$$

за сваки природан број n.

Важи и следећа једнакост

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \quad k < n.$$

Специјално за $k = 1$, $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ $(n > 1)$.

Збир првих n чланова геометријског низа са првим чланом b_1 и количником $q\,(q \neq 1)$ износи

$$S_n = b_1 \, \frac{1 - q^n}{1 - q}, \tag{1.4}$$

а ако је $q = 1$, онда је $S_n = nb_1$.

Ако количник геометријског низа задовољава $|q| < 1$, онда се збир свих чланова тог низа може израчунати помоћу формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \tag{1.5}$$

1.2 Решени задаци

1.2.1. Да ли је број 347 члан аритметичког низа $1, 5, 9, 13, \ldots$?

Решење. Дат је аритметички низ код кога је први члан једнак $a_1 = 1$ и разлика $d = 4$. На основу једнакости 1.1, општи члан је облика $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$, односно то су сви бројеви који при дељењу са 4 дају остатак 1. Број 347 при дељењу са 4 даје остатак 3, па није члан аритметичког низа. $\triangle$

1.2.2. Могу ли $\sqrt{5}$ и 5 бити чланови аритметичког низа чији је први члан једнак 2?

Решење. Нека је $\sqrt{5} = 2 + (n-1)d$ и $5 = 2 + (m-1)d$. Тада је $\dfrac{\sqrt{5} - 2}{5 - 2} = \dfrac{n-1}{m-1}$, а одавде $\sqrt{5} = 3 \cdot \dfrac{n-1}{m-1} + 2$, што је немогуће, јер је $\sqrt{5}$ ирационалан број. $\triangle$

1.2.3. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно формирају аритметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

Решење. Када би те бројеве уметнули, онда би 46 био седамнаести члан аритметичког низа, а -2 први члан. Из $a_1 = -2$ и $a_1 + 16d = 46$ следи да је $d = 3$. Збир је, према формули (1.2), једнак $S_{17} = \dfrac{17}{2}(2a_1 + 16d) = 17 \cdot 22 = 374$. △

1.2.4. Наћи први члан и разлику аритметичког низа (a_n) у коме је

$$a_2 + a_5 - a_3 = 10 \ \text{ и } \ a_2 + a_9 = 17.$$

Решење. Из једнакости $10 = a_2+a_5-a_3 = a_1+d+a_1+4d-(a_1+2d) = a_1+3d$ и $17 = a_1 + d + a_1 + 8d = 2a_1 + 9d$ добијамо систем

$$\begin{aligned} a_1 + 3d &= 10, \\ 2a_1 + 9d &= 17, \end{aligned}$$

чије је решење $a_1 = 13$ и $d = -1$. △

1.2.5. Ако је код аритметичког низа $a_n = m$, $a_m = n$, $m > n$, одредити a_{m-n}.

Решење. Решавањем система $n = a_1 + (m-1)d$, $m = a_1 + (n-1)d$ по a_1 и d долазимо до $d = \frac{m-n}{n-m} = -1$ и $a_1 = m+n-1$. Тада је $a_{m-n} = a_1+(m-n-1)d = m + n - 1 - (m - n - 1) = 2n$. △

1.2.6. Одредити први члан и разлику аритметичког низа (a_n), ако је збир прва три члана једнак -3, а збир првих пет чланова са парним индексима је 15.

Решење. Збир прва три члана низа је $S_3 = \dfrac{3}{2}(2a_1 + 2d) = 3a_1 + 3d = -3$, а збир првих пет чланова са парним индексима је $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d + a_1 + 9d = 5a_1 + 25d = 15$. Из система

$$\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -3, \\ 5a_1 + 25d &= 15, \end{aligned}$$

следи да је $a_1 = -2$ и $d = 1$. △

1.2.7. Израчунати збир првих 19 чланова аритметичког низа (a_n), ако је познато да је $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Решење. Након следећих еквиваленција $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224 \Leftrightarrow a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 11d + a_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4a_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow a_1 + 9d = 56$ налазимо једну везу између a_1 и d, па је $S_{19} = \dfrac{19}{2}[2a_1 + 18d] = 19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064$. △

1.2.8. Збир три узастопна члана аритметичког низа је 2, а збир њихових квадрата $\dfrac{14}{9}$. Наћи те бројеве.

Решење. Решавањем система добијамо следеће еквиваленције

$$\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3=2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a_1+3d=2 \\ a_1^2+a_1^2+2a_1d+d^2+a_1^2+4a_1d+4d^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a_1+3d=2 \\ 3a_1^2+6a_1d+5d^2=\frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

Ако изразимо a_1 из прве једначине и заменимо у другу једначину добијамо следеће еквиваленције

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{2-3d}{3}\right)^2+6\cdot\frac{2-3d}{3}d+5d^2=\frac{14}{9} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4-12d+9d^2}{3}+4d-6d^2+5d^2=\frac{14}{9} \\ \Leftrightarrow\ & 3\big(4-12d+9d^2\big)+36d-9d^2=14 \\ \Leftrightarrow\ & d=\frac{1}{3}\ \vee\ d=-\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

За тражени аритметички низ добијамо $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{3}$ или $a_1=1$, $d=-\frac{1}{3}$. Прва три члана низа су $\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$ или $1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}$. $\triangle$

1.2.9. Три броја су узастопни чланови растућег аритметичког низа. Збир тих бројева је 3, а збир њихових кубова је 4. Одредити те бројеве.

Решење. Из услова задатка имамо систем

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &= 3, \\ a_1^3+a_2^3+a_3^3 &= 4, \end{aligned}$$

који је еквивалентан са следећим системима

$$\begin{aligned} 3a_1+3d &= 3, \\ a_1^3+a_1^3+3a_1^2d+3a_1d^2+d^3+a_1^3+6a_1^2d+12a_1d^2+8d^3 &= 4 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_1+d &= 1, \\ 3a_1^3+9a_1^2d+15a_1d^2+9d^3 &= 4. \end{aligned}$$

Ако изразимо a_1 из прве једначине и заменимо у другу једначину добијамо

$$\begin{aligned} & 3(1-d)^3+9(1-d)^2d+15(1-d)d^2+9d^3=4 \\ \Leftrightarrow\ & 3-9d+9d^2-3d^3+9d-18d^2+9d^3+15d^2-15d^3+9d^3=4 \\ \Leftrightarrow\ & 6d^2=1\ \Leftrightarrow\ d_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

С обзиром да је низ растући прва три члана тог низа су $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$, 1 и $1+\frac{\sqrt{6}}{6}$. $\triangle$

1.2.10. У аритметичком низу је $a_4 = 5$. За коју вредност разлике d тог низа збир квадрата прва три члана ће бити најмањи?

Решење. Из услова имамо да је $5 = a_4 = a_1 + 3d$, односно $a_1 = 5 - 3d$. Збир квадрата прва три члана је $a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = 3a_1^2 + 6a_1 d + 5d^2$. Ако у последњи израз заменимо a_1 добијамо

$$\begin{aligned} 3a_1^2 + 6a_1 d + 5d^2 &= 3(5-3d)^2 + 6(5-3d)d + 5d^2 \\ &= 75 - 90d + 27d^2 + 30d - 18d^2 + 5d^2 = 14d^2 - 60d + 75. \end{aligned}$$

Збир квадрата ће бити најмањи ако је $d = -\frac{-60}{28} = \frac{15}{7}$. △

1.2.11. За које вредности x бројеви $\log 2, \log(2^x - 1)$ и $\log(2^x + 3)$ представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа?

Решење. Скуп допустивих вредности је $D = (0, +\infty)$. На основу особине аритметичког низа $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ имамо $2\log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 3)$. Одавде је $\log(2^x - 1)^2 = \log 2(2^x + 3)$, односно $(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 3)$. Ако ставимо $2^x = t$ добијамо једначину $t^2 - 4t - 5 = 0$, чија су решења $t_1 = 5$ и $t_2 = -1$. Како је $2^x > 0$, могуће је само $t = 5$, тј. $2^x = 5$. Дакле $x = \log_2 5$. △

1.2.12. Ако су бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$ узастопни чланови неког аритметичког низа, при чему међу њима нема чланова једнаких нули, доказати да је

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

Решење. На основу једнакости
$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k + d)} = \frac{1}{d}\left(\frac{(a_k + d) - a_k}{a_k(a_k + d)}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$ имамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} = \frac{1}{d} \cdot \frac{(n-1)d}{a_1 a_n} \\ &= \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

△

1.2.13. Доказати да су бројеви $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ $(a + b \neq 0,\ a + c \neq 0,\ b + c \neq 0)$ узастопни чланови једног аритметичког низа ако и само ако су бројеви a^2, b^2, c^2 узастопни чланови другог аритметичког низа.

Решење. Бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ су узастопни чланови неког аритметичког низа ако и само ако важи $\dfrac{1}{c+a} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)$. На основу следећих еквиваленција

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c+a} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{c+a} = \frac{a+2b+c}{(b+c)(a+b)}\\
&\Leftrightarrow \quad 2(b+c)(a+b) = (a+2b+c)(c+a)\\
&\Leftrightarrow \quad 2ab+2b^2+2ac+2bc = ac+a^2+2bc+2ab+c^2+ac\\
&\Leftrightarrow \quad 2b^2-a^2-c^2=0\\
&\Leftrightarrow \quad b^2 = \frac{1}{2}(a^2+c^2),
\end{aligned}$$

следи да су бројеви $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ узастопни чланови аритметичког низа ако и само ако су бројеви a^2, b^2 и c^2 узастопни чланови аритметичког низа. △

1.2.14. Нека је (a_n) аритметички низ и S_k збир првих k његових чланова. Ако за неке $m, n \in \mathbb{N}$ $(m \neq n)$ важи $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, доказати да је $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

Решење. Срeђивањем датог израза имамо

$$\begin{aligned}
\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{m}{2}[2a_1+d(m-1)]}{\frac{n}{2}[2a_1+d(n-1)]} = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow \frac{m[2a_1+d(m-1)]}{n[2a_1+d(n-1)]} = \frac{m^2}{n^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2a_1+d(m-1)}{2a_1+d(n-1)} = \frac{m}{n}\\
&\Leftrightarrow \quad n[2a_1+d(m-1)] = m[2a_1+d(n-1)]\\
&\Leftrightarrow \quad 2a_1n+dn(m-1)-2a_1m-dm(n-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2a_1(n-m)-d(n-m)=0\\
&\Leftrightarrow \quad (2a_1-d)(n-m)=0 \ \Leftrightarrow \ a_1 = \frac{d}{2}.
\end{aligned}$$

Добили смо да је $a_1 = \dfrac{d}{2}$, па је

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d} = \frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d} = \frac{d+2(m-1)d}{d+2(n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

△

1.2.15. Израчунати збир свих непарних троцифрених бројева.

Решење. Потребно је израчунати збир $S = 101+103+\ldots+999$. Број сабирака овог збира је једнак $\frac{999-101}{2}+1 = 450$, па тражени збир представља збир првих 450 чланова аритметичког низа са првим чланом $a_1 = 101$ и разликом $d = 2$. На основу формуле (1.2) имамо

$$S_{450} = \frac{450}{2}(2 \cdot 101 + 449 \cdot 2) = 247500.$$

△

1.2.16. Неки чланови аритметичке прогресије $17, 21, 25, \ldots$ и прогресије $16, 21, 26, \ldots$ су једнаки. Наћи збир првих 100 једнаких чланова ових прогресија.

Решење. Код првог аритметичког низ је $a_1 = 17$ и $d_1 = 4$, а код другог $b_1 = 16$ и $d_2 = 5$. Општи члан првог низа је $a_n = 17 + 4(n-1)$, а другог низа је $b_m = 16 + 5(m-1)$. Заједнички чланови задовољавају једнакост $17+4(n-1) = 16+5(m-1)$, а одатле је $5m = 4n+2$. Потребно је да 5 дели $4n+2$. То важи за $n = 2, 7, 12, 17, \ldots$, другим речима заједнички чланови су следећи чланови првог низа $a_2 = 21$, $a_7 = 41$, $a_{12} = 61, \ldots$ Они образују аритметички низ са првим чланом 21 и разликом 20, па је збир првих 100 чланова, применом формуле (1.2), једнак

$$S_{100} = \frac{100}{2}(2 \cdot 21 + 99 \cdot 20) = 50 \cdot 2022 = 101100.$$

△

1.2.17. Збир првих n чланова једног аритметичког низа је $S_n = 76$, а разлика низа је $d = 2$. Наћи n, ако знамо да је $n > 1$ и први члан је цео број.

Решење. Применом формуле за збир првих n чланова аритметичког низа имамо $76 = S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + 2(n-1)] = na_1 + n(n-1)$. Из претходног изразимо a_1 и добијамо $a_1 = \dfrac{76 - n(n-1)}{n} = \dfrac{76}{n} - (n-1)$. Да би a_1 био цео број потребно је да n дели 76. Позитивни бројеви који деле број 76 и већи од 1 јесу $2, 4, 19, 38$ и 76. Решење је $n \in \{2, 4, 19, 38, 76\}$. △

1.2.18. Доказати да за производ првих n чланова позитивног геометријског низа важи $b_1 b_2 \cdots b_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n}$.

Решење. Доказ следи на основу следећих еквиваленција

$$\begin{aligned} b_1 b_2 \cdots b_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n} \quad &\Leftrightarrow \quad b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdots b_1 q^{n-1} = \sqrt{(b_1 b_1 q^{n-1})^n} \\ &\Leftrightarrow \quad b_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+(n-1)} = \sqrt{(b_1 b_1 q^{n-1})^n} \\ &\Leftrightarrow \quad b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \sqrt{b_1^{2n} q^{n(n-1)}} \\ &\Leftrightarrow \quad b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

△

1.2.19. Количник геометријског низа је $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доказати да је у овом низу сваки члан почевши од другог, једнак разлици двају њему суседних чланова.

Решење. Потребно је доказати да важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1}$ за сваки природан број $n > 1$. Наиме, важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1} \;\Leftrightarrow\; b_1 q^{n-1} = b_1 q^n - b_1 q^{n-2} \;\Leftrightarrow$ $q = q^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; q^2 - q - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Одавде видимо, да ако је $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, онда важи $b_n = b_{n+1} - b_{n-1}$ за $n > 1$. △

1.2.20. Ако је количник геометријског низа (b_n) једнак 5, доказати да за његове чланове важи релација $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Општи члан геометријског низа је $b_n = b_1 q^{n-1}$. Очигледно је да важи $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n \;\Leftrightarrow\; b_1 q^{n+1} = 4b_1 q^n + 5b_1 q^{n-1} \;\Leftrightarrow\; q^2 = 4q + 5 \;\Leftrightarrow$ $q^2 - 4q - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; q = 5 \vee q = -1$. Тиме смо доказали да за $q = 5$ важи $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. △

1.2.21. Збир првог и трећег члана растућег геометријског низа је 20, а збир прва три члана је 26. Наћи тај низ.

Решење. Први збир је $a_1 + a_3 = a_1 + a_1 q^2 = a_1\left(1+q^2\right) = 20$, а други $26 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1\left(1+q+q^2\right)$. Имамо систем

$$\begin{aligned} a_1\left(1+q^2\right) &= 20, \\ a_1\left(1+q+q^2\right) &= 26. \end{aligned}$$

Из друге једначине добијамо $a_1 = \dfrac{26}{1+q+q^2}$ и заменом у прву једначину имамо $\dfrac{26}{1+q+q^2}\left(1+q^2\right) = 20$, а одавде $26 + 26q^2 = 20 + 20q + 20q^2$. Добили смо једначину $3q^2 - 10q + 3 = 0$ из које следи $q_1 = 3$ и $q_2 = \frac{1}{3}$. Низ је растући, па је $q = 3$ и $a_1 = 2$. △

1.2.22. Разлика првог и петог члана геометријског низа, чији су сви чланови позитивни, износи 15, а збир првог и трећег члана тог низа је 20. Наћи збир првих пет чланова тог низа.

Решење. Из услова задатка имамо

$$15 = a_1 - a_5 = a_1 - a_1 q^4 = a_1\left(1-q^4\right),$$

$$20 = a_1 + a_3 = a_1 + a_1 q^2 = a_1\left(1+q^2\right).$$

Добили смо систем

$$\begin{aligned} a_1\left(1-q^4\right) &= 15, \\ a_1\left(1+q^2\right) &= 20. \end{aligned}$$

Ако поделимо прву једначину са другом и добијамо $\dfrac{1-q^4}{1+q^2}=\dfrac{15}{20}$, а одавде

$$20\big(1-q^4\big)=15\big(1+q^2\big)\ \Leftrightarrow\ 4q^4+3q^2-1=0\ \Leftrightarrow\ q=\frac{1}{2}\ \vee\ q=-\frac{1}{2}.$$

Низ је растући, па је $q=\frac{1}{2}$. Први члан је $a_1=\dfrac{20}{1+q^2}=\dfrac{20}{\frac{5}{4}}=16$, а збир $S_5=a_1\dfrac{1-q^5}{1-q}=16\cdot\dfrac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=32\cdot\dfrac{31}{32}=31.$ $\triangle$

1.2.23. Четврти члан геометријског низа је за 24 већи од другог члана, а збир другог и трећег члана је 6. Наћи тај низ.

Решење. Из првог услова следи $24=a_4-a_2=a_1q^3-a_1q=a_1\big(q^3-q\big)$, а из другог $6=a_2+a_3=a_1q+a_1q^2=a_1\big(q+q^2\big)$. Добили смо систем

$$\begin{aligned} a_1\big(q^3-q\big) &= 24,\\ a_1\big(q+q^2\big) &= 6. \end{aligned}$$

Ако $q\notin\{-1,0\}$, онда из друге једначине имамо $a_1=\dfrac{6}{q+q^2}$. Заменом у прву једначину добијамо $\dfrac{6}{q+q^2}\big(q^3-q\big)=24$. Решење ове једначине је $q=5$. С обзиром да $q=0$ и $q=-1$ не задовољавају једнакост $a_1\big(q+q^2\big)=6$, онда је $q=5$ количник низа и $a_1=\dfrac{1}{5}$. $\triangle$

1.2.24. Посматрајмо првих n чланова растућег геометријског низа. Ако је збир првог и последњег члана 66, производ другог и претпоследњег је 128, а збир свих чланова је 126, одредити број n.

Решење. Из једнакости $a_1+a_n=66$, $a_2a_{n-1}=128$, $S_n=126$ следи

$$a_1+a_1q^{n-1}=66,\ a_1q\cdot a_1q^{n-2}=128,\ a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}=126\ \ (q\neq 1),$$

односно

$$\begin{aligned} a_1\left(1+q^{n-1}\right) &= 66,\\ a_1^2q^{n-1} &= 128,\\ a_1\frac{1-q^n}{1-q} &= 126. \end{aligned}$$

Како је $a_1\neq 0$, онда из друге једначине имамо $q^{n-1}=\frac{128}{a_1^2}$, па заменом у прву једначину добијамо

$$a_1\left(1+\frac{128}{a_1^2}\right)=66\Leftrightarrow a_1\frac{a_1^2+128}{a_1^2}=66\Leftrightarrow a_1^2-66a_1+128=0\Leftrightarrow a_1=2\vee a_1=64.$$

Ако је $a_1 = 2$, тада је $q^{n-1} = \frac{128}{a_1^2} = 32$ и $2 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 126$. Последња једначина се може записати као $2 \cdot \frac{1-q^{n-1}q}{1-q} = 126$, одакле заменом $q^{n-1} = 32$ добијамо $1 - 32q = 63(1-q) \iff q = 2$. Према томе, $n = 6$.

Ако је $a_1 = 64$, тада је $q^{n-1} = \frac{128}{a_1^2} = \frac{1}{32}$ и $2 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 126$. Последња једначина се може записати као $64 \cdot \frac{1-q^{n-1}q}{1-q} = 126$, одакле заменом $q^{n-1} = \frac{1}{32}$ добијамо $32 - q = 63(1-q) \iff q = 2$. И у овом случају је $n = 6$. △

1.2.25. Израчунати збир $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$.

Решење. Посматрајмо једначине

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n, \\ xS_n &= x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + (n+1)x^{n+1}. \end{aligned}$$

Ако од прве одузмемо другу једначину добијамо

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1}.$$

Саберимо десни израз примењујући формулу (1.4)

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1} = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Према томе, разматрамо случајеве $x \neq 1$ и $x = 1$.

Ако је $x \neq 1$, онда је $(1-x)S_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}$, а одатле

$$S_n = \frac{\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}\left[\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}\right].$$

Ако је $x = 1$, онда је

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

△

1.2.26. Израчунати $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Решење. Посматрајмо једначине

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} \\ \frac{1}{2}S_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ако од прве једначине одузмемо другу имамо

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Сређивањем израза добијамо

$$\begin{aligned}S_n &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\ &= 1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{4+2n-1}{2^n}=3-\frac{3+2n}{2^n}.\end{aligned}$$

△

1.2.27. Доказати да израз $\dfrac{S_{n+2}-S_n}{S_n-S_{n-2}}$, где је S_n збир првих n чланова геометријског низа, зависи само од одговарајућег количника q.

Решење. Ако је $q \neq 1$, онда је, применом формуле (1.4),

$$\frac{S_{n+2}-S_n}{S_n-S_{n-2}}=\frac{a_1\frac{1-q^{n+2}}{1-q}-a_1\frac{1-q^n}{1-q}}{a_1\frac{1-q^n}{1-q}-a_1\frac{1-q^{n-2}}{1-q}}=\frac{1-q^{n+2}-(1-q^n)}{1-q^n-(1-q^{n-2})}=\frac{-q^{n+2}+q^n}{-q^n+q^{n-2}}=q^2,$$

а ако је $q=1$, онда је

$$\frac{S_{n+2}-S_n}{S_n-S_{n-2}}=\frac{n+2-n}{n-(n-2)}=1.$$

Добили смо да је израз једнак q^2 за свако $q \neq 0$. △

1.2.28. Збир првих n чланова неког позитивног геометријског низа је S, а збир њихових реципрочних вредности је t. Израчунати производ P тих n чланова.

Решење. Нека је $q \neq 1$. Тада је $S=a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ и

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q}+\ldots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}\\ &= \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q^{n-1}}\right)=\frac{1}{a_1}\frac{1-\frac{1}{q^n}}{1-\frac{1}{q}}=\frac{1}{a_1}\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}.\end{aligned}$$

Одавде је $\dfrac{S}{t}=a_1^2q^{n-1}$, па је тражени производ

$$P=a_1a_2\cdots a_n=a_1^nq^{1+2+\ldots+n-1}=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=(a_1^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{S}{t}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Ако је $q=1$, онда је $S=a_1n$ и $t=\dfrac{n}{a_1}$, а одатле $\dfrac{S}{t}=a_1^2$. Производ у овом случају је $P=a_1\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_1=a_1^n=(a_1^2)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{S}{t}\right)^{\frac{n}{2}}$. △

1.2.29. Нека је $k > 1$ и n паран природан број. Наћи скуп решења неједначине (по x)
$$\log_2 x - 2k\log_{2^2} x + 3k^2\log_{2^3} x - \cdots + n(-k)^{n-1}\log_{2^n} x > \frac{1-(-k)^n}{1+k}\log_2(x^2-2).$$

Решење. Скуп допустивих решења неједначине је
$$D:\ x > 0 \ \wedge\ x^2 - 2 > 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \left(\sqrt{2}, +\infty\right).$$
Израз на левој страни неједнакости је
$$\log_2 x - 2k\log_{2^2} x + 3k^2\log_{2^3} x - \ldots + n(-k)^{n-1}\log_{2^n} x =$$
$$= \log_2 x - k\log_2 x + k^2\log_2 x - \ldots + (-k)^{n-1}\log_2 x.$$
Последња сума је сума првих n чланова геометријског низа код кога је први члан једнак $\log_2 x$, а количник $q = -k$, па је једнака $\dfrac{1-(-k)^n}{1+k}\log_2 x$. Ако добијену вредност заменимо у неједнакост добијамо
$$\begin{aligned}\log_2 x < \log_2(x^2-2) \quad &\Leftrightarrow \quad x < x^2 - 2 \ \wedge\ x \in D \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2 - x > 0 \ \wedge\ x \in D\\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \ \wedge\ x \in D.\end{aligned}$$

Решење неједначине је $x \in (2, +\infty)$. △

1.2.30. Израчунати збир $1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} - \ldots + (-1)^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \ldots$

Решење. Применом формуле (1.5) имамо
$$S = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \ldots + (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}.$$
△

1.2.31. Одредити количник опадајућег геометријског низа чији је први члан 3, а збир свих чланова $\dfrac{7}{2}$.

Решење. Први члан је $b_1 = 3$, а збир свих чланова $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{7}{2}$. Одавде следи да је $1 - q = \dfrac{2}{7}\cdot 3 = \dfrac{6}{7}$, односно $q = \dfrac{1}{7}$. △

1.2.32. Израчунати збир $0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$.

Решење. Применом формуле (1.5) имамо
$$S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$
△

1.2.33. Израчунати збир $\log 5 + \log\sqrt{5} + \log\sqrt[4]{5} + \log\sqrt[8]{5} + \ldots$.

Решење. Применом формуле (1.5) имамо

$$\begin{aligned} S &= \log 5 + \log\sqrt{5} + \log\sqrt[4]{5} + \log\sqrt[8]{5} + \ldots \\ &= \log 5 + \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{4}\log 5 + \frac{1}{8}\log 5 + \ldots \\ &= (\log 5)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\log 5 = 2\log 5. \end{aligned}$$

△

1.2.34. Израчунати збир $S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n}$.

Решење. Ако искористимо чињеницу да је $\underbrace{99\ldots9}_{k} = 10^k - 1, k = 1, 2, \ldots, n$, добијамо $S_n = 9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n} = 10-1+\big(10^2-1\big)+\big(10^3-1\big)+\ldots+(10^n-1) = 10+10^2+10^3+\ldots+10^n-n = 10\cdot\frac{1-10^n}{1-10}-n = \frac{10}{9}(10^n-1)-n$. △

1.2.35. Доказати да је:

$$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Решење. Израз на левој страни је бесконачни збир чланова геометријског реда, па је једнак

$$\begin{aligned} S_1 &= 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \ldots = 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right) \\ &= 3\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 3\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2, \end{aligned}$$

а израз на десној

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

△

1.2.36. За коју вредност $a \in \mathbb{R}$ је збир геометријског реда

$$2a + a\sqrt{2} + a + \ldots$$

једнак 8?

Решење. Ово је бесконачни збир, код кога је први сабирак $a_1 = 2a$ и количник $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-1, 1)$, па је на основу формуле (1.5) једнак

$$S = 2a + a\sqrt{2} + a + \ldots = 2a\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Изједначимо збир са 8 и налазимо $a = 2\big(2-\sqrt{2}\big)$. △

1.2.37. Израчунати збир $2+5+11+\ldots+(3\cdot 2^{n-1}-1)$.

Решење. Тражени збир је једнак

$$\begin{aligned}
& 2+5+11+...+\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)\\
= \; & \left(3\cdot 2^{1-1}-1\right)+\left(3\cdot 2^{2-1}-1\right)+\ldots+\left(3\cdot 2^{n-1}-1\right)\\
= \; & 3\left(2^{1-1}+2^{2-1}+2^{3-1}+\ldots+2^{n-1}\right)-1-1-1-\ldots-1\\
= \; & 3\left(1+2^{1}+2^{2}+\ldots+2^{n-1}\right)-1-1-\ldots-1\\
= \; & 3\cdot\frac{1-2^{n}}{1-2}-n=3\left(2^{n}-1\right)-n.
\end{aligned}$$

△

1.2.38. Наћи скуп решења неједначине $x+x^2+x^3+\ldots<1$.

Решење. Да би сума била коначна потребно је да важи $|x|<1$. Тада је

$$x+x^2+x^3+\ldots=\frac{x}{1-x}<1.$$

Последња неједначина је еквивалентна неједначини $x<1-x$, па је решење $-1<x<\frac{1}{2}$. △

1.2.39. Наћи опадајући геометријски низ чији је сваки члан 10 пута већи од збира свих следећих иза њега.

Решење. Из услова $a_n=10(S-S_n)$ следи $a_1q^{n-1}=10\left(a_1\dfrac{1}{1-q}-a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$, а одатле $q^{n-1}(1-q)=10(1-1+q^n)$. Сређивањем последње једначине добијамо $q^{n-1}-q^n=10q^n$, односно $q=\dfrac{1}{11}$. Први члан је произвољан. △

1.2.40. Одредити граничну вредност израза:

$$D=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}}.$$

Решење. Коришћењем формуле за бесконачни збир (1.5) имамо

$$\begin{aligned}
D=\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\cdots}}}} \; &= \; 3^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{8}}5^{\frac{1}{16}}\cdots=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots}\\
&= \; 3^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}\cdot 5^{\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}=3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9\cdot 5}=\sqrt[3]{45}.
\end{aligned}$$

△

1.2.41. Над висином једнакостраничног троугла ABC странице a, конструисан је нови једнакостраничан троугао (чија је страница висина првобитног троугла), па је над висином новог троугла конструисан следећи једнакостраничан троугао, итд, (слика 22). Одредити граничне вредности којим теже збир обима и збир површина свих овако конструисаних једнакостраничних троуглова (њих бесконачно много).

Решење. Странице ових троуглова чине геометријски низ. Дати троугао ABC има страницу $b_1 = a$. Следећи троугао AB_1C_1 има страницу $b_2 = AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па троугао AB_2C_2 са страницом $b_3 = b_2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$, итд. Збир обима свих троуглова, користећи формулу (1.5), једнак је

$$\begin{aligned} O &= O_1 + O_2 + O_3 + \ldots = 3a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} + \ldots\right) = \frac{3a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2-\sqrt{3}} \\ &= 6a\left(2+\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Збир површина свих троуглова, користећи формулу (1.5), је

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots &= a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{3a}{4}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \ldots\right) = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

△

1.2.42. У круг полупречника r је уписан квадрат, а онда у тај квадрат је уписан круг. Затим је поново у добијени круг уписан квадрат, па у квадрат круг, и тако до бесконачности. Израчунати границу којој теже обими свих квадрата и површине свих кругова.

Решење. Први квадрат је странице $r\sqrt{2}$, затим, уписан круг полупречника $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, па квадрат странице $\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$, круг полупречника $\frac{1}{2}\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$ и тако даље. Збир обима свих квадрата је

$$O = 4r\sqrt{2} + 4\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} + 4\frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots,$$

што је бесконачни збир са првим чланом $4r\sqrt{2}$ и количником $\frac{1}{\sqrt{2}}$, па је

$$O = 4r\sqrt{2}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4r\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4r\frac{2}{\sqrt{2}-1} = 8r\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Збир површина свих кругова је

$$P = r^2\pi + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi + \ldots = r^2\pi + \frac{1}{2}r^2\pi + \ldots,$$

што је бесконачни збир са првим чланом $r^2\pi$ и количником $\frac{1}{2}$, па је

$$P = r^2\pi \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = r^2\pi \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2r^2\pi.$$

△

1.2.43. Израчунати збир $\dfrac{5}{2} + 5 + \dfrac{19}{2} + 18 + \ldots + \dfrac{n+2^{n+1}}{2}$.

Решење. Тражени збир је једнак

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2} + 5 + \frac{19}{2} + 18 + \ldots + \frac{n+2^{n+1}}{2} \quad &= \quad \frac{1+2^{1+1}}{2} + \frac{2+2^{2+1}}{2} + \ldots + \frac{n+2^{n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1+2+\ldots+n) + \frac{1}{2}\left(2^{1+1}+2^{2+1}+\ldots+2^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \left(2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + 2\cdot\frac{1-2^n}{1-2} = \frac{n(n+1)}{4} + 2\left(2^n-1\right).
\end{aligned}$$

△

1.2.44. Ако је (b_n) геометријски низ и $b_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, какав низ чине логаритми чланова датог низа? Наћи збир првих n чланова добијеног низа.

Решење. Дефинишимо низ $a_n = \log b_n$. Ако је q количник низа b_n, онда је $a_{n+1} - a_n = \log b_{n+1} - \log b_n = \log(b_1q^n) - \log(b_1q^{n-1}) = \log\dfrac{b_1q^n}{b_1q^{n-1}} = \log q$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказали смо да је низ (a_n) аритметички са разликом $d = \log q$. Тражени збир је $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)] = \dfrac{n}{2}[2\log b_1 + (n-1)\log q]$. △

1.2.45. Ако су бројеви a, b и c истовремено пети, седамнаести и тридесет седми члан једне аритметичке и једне геометријске прогресије, доказати да је $a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b} = 1$.

Решење. Означимо са (a_n) аритметички низ са разликом d и са (b_n) геометријски низ са количником q. Тада је $a = a_1 + 4d$, $b = a_1 + 16d$, $c = a_1 + 36d$, $a = b_1q^4$, $b = b_1q^{16}$ и $c = b_1q^{36}$. Заменом у дати израз добијамо

$$\begin{aligned}
& a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b} \\
= \quad & \left(b_1q^4\right)^{a_1+16d-(a_1+36d)}\cdot\left(b_1q^{16}\right)^{a_1+36d-(a_1+4d)}\cdot\left(b_1q^{36}\right)^{a_1+4d-(a_1+16d)} \\
= \quad & \left(b_1q^4\right)^{-20d}\cdot\left(b_1q^{16}\right)^{32d}\cdot\left(b_1q^{36}\right)^{-12d} = b_1^{-20d+32d-12d}\cdot q^{-80d+16\cdot 32d-36\cdot 12d} \\
= \quad & b_1^0q^0 = 1.
\end{aligned}$$

△

1.2.46. Низ бројева $1, 8, 22, 43, \dots$ има особину да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ 7,14,21... . Наћи индекс члана датог низа који је једнак $a_n = 35351$.

Решење. Означимо први низ са (a_n) и други низ (аритметички) са (b_n). Задовољена је седећа релација $b_k = a_{k+1} - a_k$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Можемо приметити да је $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} = a_2-a_1+a_3-a_2+...+a_n-a_{n-1} = a_n-a_1$, одакле $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = a_1 + S_{n-1}$, где је S_{n-1} збир првих $n-1$ чланова аритметичког низа (b_n). Из услова задатка је $a_n = 35351$, па важи $a_1 + \frac{n-1}{2}[2b_1 + d(n-2)] = 35351$. Ако у једначину убацимо познате вредности $a_1 = 1$, $b_1 = 7$ и $d = 7$ добијамо $7n^2 - 7n - 70700 = 0$, а њено позитивно решење је $n = 101$. △

1.2.47. У аритметичком низу са различитим члановима први, трећи и седми члан образују геометријски низ. Ако је први члан аритметичког низа 20, наћи десети члан аритметичког низа.

Решење. Означимо са (a_n) аритметички низ са разликом d. Први, трећи и седми члан низа (a_n) образују геометријски низ па важи $a_3^2 = a_1a_7$, односно $(a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d)$. Како је $a_1 = 20$, то је $(20 + 2d)^2 = 20(20 + 6d) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 400 + 80d + 4d^2 = 400 + 120d \Leftrightarrow d(d - 10) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee d = 10$. С обзиром да су чланови аритметичког низа међусобно различити, разлика је $d = 10$, па је $a_{10} = 110$. △

1.2.48. Дати су аритметички низ и геометријски низ са првим чланом $b_1 = 1$ и количником $q > 0$. Трећи низ $1, 3, 6, \dots$ формиран је сабирањем одговарајућих чланова аритметичког и геометријског низа. Израчунати збир првих 10 чланова трећег низа.

Решење. Означимо аритметички низ са (a_n), геометријски низ са (b_n), а трећи низ са (c_n). Очигледно је да из $a_1 + b_1 = 1$, $a_2 + b_2 = 3$, $a_3 + b_3 = 6$ следи да је $a_1 = 0,\ d + q = 3,\ 2d + q^2 = 6$, а одавде $d = 1$, $q = 2$. Збир је

$$\begin{aligned} S_{10} &= c_1 + c_2 + \ldots + c_{10} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_{10} + b_{10}) \\ &= a_1 + a_2 \ldots + a_{10} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{10} = 5(2a_1 + 9d) + b_1\frac{1 - q^{10}}{1 - q} \\ &= 44 + 2^{10}. \end{aligned}$$

△

1.2.49. Ако се средњи од три броја који образују геометријски низ повећа за 10, добија се аритметички низ са разликом 20. Колики је збир цифара тог средњег броја?

Решење. Прва три члана геометријског низа су a_1, a_1q, a_1q^2. После повећања добија се аритметички низ a_1, $a_1q + 10$, a_1q^2 са разликом $d = 20$.

Одавде добијамо систем

$$\begin{aligned} a_1q + 10 - a_1 &= 20, \\ a_1q^2 - (a_1q + 10) &= 20, \end{aligned}$$

који је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} a_1(q-1) &= 10, \\ a_1q(q-1) &= 30. \end{aligned}$$

Ако је $q \neq 1$, онда дељењем друге једначине са првом добијам $q = 3$, а одатле $a_1 = 5$. За $q = 1$ систем нема решење. Према томе, други члан је низа је $a_2 = a_1q = 15$ и збир његових цифара је 6. △

1.2.50. Низ (x_n) је истовремено аритметички и геометријски. Ако је $x_{128} = 2^{128}$, колико је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{128}$?

Решење. Нека низ има разлику d, количник q и први члан x_1. С обзиром да је низ истовремено и аритметички и геометријски, важи $x_{n+1} = x_1 + nd = x_1q^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а одавде $\frac{q^n-1}{n} = \frac{d}{x_1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Према томе за $n = 1$ и $n = 2$ важи $\frac{q^1-1}{1} = \frac{q^2-1}{2}$, а одавде $q = 1$. Добили смо да само константан низ може бити истовремено и аритметички и геометријски.У овом случају $x_1 = 2^{128},\ d = 0,\ q = 1$, па је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{128} = 128 \cdot 2^{128} = 2^{135}$. △

1.3 Задаци за вежбу

1.3.51. Бројеви a, b, c су узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да су и бројеви $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ такође узастопни чланови аритметичког низа.

Решење. Искористити чињеницу да су бројеви a, b, c узастопни чланови аритметичког низа *akko* важи $2b = a + c$. △

1.3.52. Ако позитивни бројеви a, b и c чине аритметичку прогресију, доказати да то важи и за бројеве $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Решење. Искористити чињеницу да је $2b = a + c$. △

1.3.53. Ако бројеви a^2, b^2, c^2 чине аритметичку прогресију, доказати да и бројеви $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ чине аритметичку прогресију.

Решење. Искористити чињеницу да је $2b^2 = a^2 + c^2$. △

1.3.54. Ако су бројеви $a_1, a_2, ..., a_n$ узастопни чланови аритметичког низа, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

Решење. Рационалисати сабирке. △

1.3.55. Нека су позитивни бројеви $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ узастопни чланови аритметичког низа. Доказати да је
$$\frac{1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_2a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_na_1} = \frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Решење. Искористити чињеницу да је $a_k = a_1 + (k-1)d$. △

1.3.56. Ако је за свако $n \in \mathbb{N}$ збир првих n чланова неког аритметичког низа $S_n = 4n^2 - 3n$, написати прва три члана тог низа.

Решење. Прва три члана тог низа су $1, 9$ и 17. △

1.3.57. Ако за аритметички низ важи $S_n = S_m (n \neq m)$, доказати да је $S_{m+n} = 0$.

Решење. Искористити формулу за израчунавање суме првих n чланова аритметичког низа. △

1.3.58. Одредити све аритметичке низове чија је разлика $d = 2$, а израз $\dfrac{S_{3n}}{S_n}$ не зависи од n.

Решење. Низ $3, 5, 7, \ldots$. △

1.3.59. Дати су реални бројеви a, b, c. Под којим условима постоји аритметички низ, такав да је за свако n збир S_n првих n његових чланова једнак $an^2 + bn + c$?

Решење. $c = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. △

1.3.60. У аритметичком низу је $a_m = n$ и $a_n = m$ за неке m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Наћи a_k.

Решење. Општи члан низа је $a_k = n + m - k$. △

1.3.61. Наћи аритметичку прогресију код које збир првих n чланова износи $3n^2 + 4n$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. $a_1 = 7$, $d = 6$. △

1.3.62. Дата су два аритметичка низа чије су разлике 13 и $\sqrt{13}$. Доказати да постоји највише један број који се појављује у оба низа.

Решење. Не постоје $m, n \in \mathbb{N}$ тако да је задовољено $m \cdot 13 = n \cdot \sqrt{13}$. △

1.3.63. Ако у геометријском низу (b_n) збир прва два члана $S_2 = 25$, а збир прва три члана $S_3 = 105$, одредити први члан b_1 и количник q.

Решење. $q_1 = -\dfrac{4}{5}$, $b_1 = 125$ или $q_2 = 4, b_1 = 5$. △

1.3.64. Разлика четвртог и првог члана геометријског низа је 52, а збир прва три члана низа је 26. Наћи збир првих шест чланова тог низа.

Решење. Збир првих шест чланова тог низа је $S_6 = 728$. △

1.3.65. Наћи четири броја који су узастопни чланови геометријског низа у којем је други члан мањи од првог за 35, а трећи већи од четвртог за 560.

Решење. $7, -28, 112, -448$ или $-11\frac{2}{3}, -46\frac{2}{3}, -186\frac{2}{3}, -746\frac{2}{3}$. △

1.3.66. Доказати да је

$$\left(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1\right)\left(10^{n+1} + 5\right) + 1 = \left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2 .$$

Решење. Искористити формулу за збир првих n чланова геометријског низа. △

1.3.67. Израчунати збир $1 + 2^2 q + \ldots + (n+1)^2 q^n, q \neq 1$.

Решење. $\dfrac{2(1-q^{n+1})}{(1-q)^3} - \dfrac{1+(n+1)q^{n+1}}{(1-q)^2} - \dfrac{(n+1)^2 q^{n+1}}{1-q}$. △

1.3.68. У геометријском низу (b_n) важи $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$. Ако је збир првих n чланова низа $S_n = 3069$, наћи n.

Решење. $n = 10$. △

1.3.69. Збир три броја који образују опадајући геометријски низ је 126. Ако је средњи члан 24, који је први члан?

Решење. $a_1 = 96$. △

1.3.70. У растућој геометријској прогресији збир прва три члана је 52, а производ првог и трећег члана је 144. Колики је збир прва два члана те прогресије?

Решење. Збир прва два члана је $b_1 + b_2 = 16$. △

1.3.71. Нека су $375, a, b, c, d$ и $-0,12$ узастопни чланови геометријског низа. Колико је $b + c$?

Решење. $b + c = 12$. △

1.3.72. Између 3 и 768 уметнути три броја, тако да свих пет бројева чине растућу геометријску прогресију.

Решење. $3, 12, 48, 192, 768$. △

1.3.73. На дужи $|AB| = 195cm$ наћи тачке C, а онда на дужи CB наћи тачку D, тако да дужине добијених делова чине геометријски низ и $|BD| = |AC| + 120cm$.

Решење. $|AC| = 15cm$, $|CD| = 45cm$, $|DB| = 135cm$. △

1.3.74. Наћи пети и осми члан геометријског низа (b_n) ако је $b_2 = 3$ и $q = -4$.

Решење. $b_5 = -192, b_8 = 3 \cdot 4^6$. △

1.3.75. Збир три броја који су узастопни чланови геометријског низа је 13, а збир њихових квадрата је 91. Наћи те бројеве.

Решење. $q = 3, b_1 = 1$ или $q = \frac{1}{3}, b_1 = 9$. △

1.3.76. Наћи количник геометријског низа (b_n) ако је $b_2 = 6, b_8 = 384$.

Решење. $q = 2$ или $q = -2$. △

1.3.77. Ако је S_n збир првих n чланова геометријског низа, доказати да је $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

Решење. Искористити формулу за суму n првих чланова геометријског низа. △

1.3.78. Израчунати збир $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$.

Решење. $S = 2$. △

1.3.79. Израчунати збир $x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,\ |x| < 1$.

Решење. $S = \dfrac{x}{1-x}$. △

1.3.80. Израчунати збир $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,\ |x| < 1$.

Решење. $S = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1+x}$. △

1.3.81. Израчунати збир $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots,\ |x| < \dfrac{1}{2}$.

Решење. $S = \dfrac{1}{1-2x}$. △

1.3.82. Израчунати збир $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решење. $S = \dfrac{1}{1-\sin x}$. △

1.3.83. Доказати да је:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right).$$

Решење. Збирови на левој и десној страни су једнаки и износе $S = 3$. △

1.3.84. За коју вредност x збир геометријског реда

$$\frac{1}{7^x+1}+\frac{1}{(7^x+1)^2}+\frac{1}{(7^x+1)^3}+\ldots$$

износи 7?

Решење. $x=-1$. △

1.3.85. Решити једначину $3+10+17+\ldots+x=345$.

Решење. $x=66$. △

1.3.86. У круг полупречника r је уписан једнакостраничан троугао, а онда у тај троугао уписан је круг. Затим је поново у добијени круг уписан једнакостраничан троугао, па у троугао круг, и тако до бесконачности. Израчунати границу којој теже збирови обима свих троуглова и границу којој теже збирови површина свих троуглова.

Решење. $O=6r\sqrt{3}$, $P=r^2\sqrt{3}$. △

1.3.87. Бројеви $5x-y$, $2x+3y$ и $x+2y$ су узастопни чланови аритметичког низа, а бројеви $(y+1)^2$, $xy+1$ и $(x-1)^2$ су узастопни чланови геометријског низа. Наћи x и y.

Решење. $(x,y)=(0,0)$ или $(x,y)=\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$ или $(x,y)=\left(-\frac{3}{4},-\frac{3}{10}\right)$. △

1.3.88. Одредити четири броја, тако да прва три одређују геометријски низ, а последња три аритметички низ и при томе је збир првог и последњег 14, а збир остала два је 12.

Решење. $2,4,8,12$ или $\dfrac{25}{2},\dfrac{15}{2},\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{2}$. △

1.3.89. Наћи збир n разломака $\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{4}+\ldots$, ако бројиоци разломака чине аритметичку, а имениоци геометријску прогресију.

Решење. $S_n=7-\dfrac{4n-1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n-3}}$ $(n\geq 3)$, $S_1=\dfrac{3}{2}$, $S_2=\dfrac{13}{4}$. △

1.3.90. Нека су a_1,a_2,a_3,a_4 узастопни чланови растућег аритметичког низа, а b_1,b_2,b_3,b_4 узастопни чланови геометријског низа. Ако је $a_1=b_1=1, a_2=b_2$ и $b_3-a_3=1$, наћи b_4-a_4.

Решење. $q=2$, $b_4-a_4=4$. △

1.3.91. Ако бројеви $a_n, n\in\mathbb{N}$ образују аритметички низ, доказати да бројеви $b_n=2^{a_n}, n\in\mathbb{N}$ образују геометријски низ.

Решење. Искористити чињеницу да је позитиван низ (b_n) геометријски ако и само ако је $b_n=\sqrt{b_{n+1}b_{n-1}}$. △

1.3.92. У геометријском низу први, трећи и пети члан, редом су једнаки првом, четвртом и шестнаестом члану неког аритметичког низа. Наћи четврти члан аритметичког низа ако је његов први члан 5.

Решење. Четврти члан аритметичког низа је $a_4 = a_1 + 3d = 5 + 3 \cdot 5 = 20$ или $a_4 = 5 + 3 \cdot 0 = 5$. △

1.3.93. У аритметичком низу са различитим члановима први, пети и једанаести члан чине узастопне чланове геометријског низа. Ако је први члан 24, колики је десети члан аритметичког низа?

Решење. $a_{10} = 51$. △