Математички факултет

Универзитет у Београду

Домаћи задатак

Златко Лазовић, Ђорђе Николић

6. новембар 2016.

верзија 1.1

Садржај

1 МЕТРИЧКИ ПРОСТОРИ

Задатак 1.1.
а) Нека је (M, d) метрички простор и нека је (x_n) низ у M такав да је $x_n \to x \in M$ и $x_n \to x' \in M$. Доказати да је $x = x'$.

б) Користећи дефиницију непрекидности у терминима отворених скупова показати да из непрекидности функција $f : R \to S$ и $g : S \to T$ следи непрекидност функције $g \circ f$.

в) Показати да функција $d(f_1, f_2) = \sqrt{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx}$ није метрика на скупу Риман интеграбилних функција на $[a, b]$.

г) Ако је (M, d) коначан метрички простор, показати да је сваки подскуп од M отворен скуп.

Задатак 1.2.
а) Који од следећих подскупова у $\mathbb{R}$ су отворени, који су затворени, а који нису ни затворени ни отворени:

$(-5, 1) \cup (0, +\infty)$; $(-\infty, 2]$; $\{0\}$ $(0, 2]$ $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\emptyset$?

б) Који од следећих подскупова у $\mathbb{R}^2$ су отворени, који су затворени, а који нису ни затворени ни отворени:

$[0, 1] \times \{0\}$; $(0, 1) \times \{0\}$; $\{(x, y) | 1 < 4x^2 + y^2 < 4\}$; $\{(x, y) | xy = 1\}$; $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$; $\{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y > 0\}$; $\{(x, y) | e^{x+2+y^2} = 1 + (y^3 - x^3)(x^7 + y^7)\}$?

Задатак 1.3. Нека је (M, d) метрички простор и нека су A, B непразни ограничени подскупови од M, при чему је $A \cap B = \emptyset$. Показати да је $A \cup B$ ограничен и да је $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam} A + \mathrm{diam} B$. Показати да ако је $A \subset B$, онда је $\mathrm{diam} A \leq \mathrm{diam} B$.

Задатак 1.4. Нека су $(C[a, b], d_\infty)$ и $(C^1[a, b], d_\infty)$ метрички простори.

а) Да ли је $C^1[a, b]$ затворен подскуп од $C[a, b]$?

б) Да ли је диференцирање $L : C^1[a, b] \to C[a, b], L(f)(x) = f'(x)$ непрекидна функција?

в) Да ли је интеграљење $I : C[a, b] \to C[a, b], I(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрекидна функција?

Задатак 1.5. Нека је $S \subset \mathbb{R}^n$ и S' скуп свих тачака нагомилавања скупа S.

а) Наћи S' ако је S једнак: $(0, 1)$; $\{0\}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\emptyset$.

б) Доказати да је $S \cup S'$ најмањи затворен скуп који садржи S.

Задатак 1.6. Нека су (M, d_M) и (N, d_N) метрички простори.

а) Показати да је $d : (M \times N)^2 \to \mathbb{R}, d((m_1, n_1), (m_2, n_2)) = d_M(m_1, m_2) + d_N(n_1, n_2)$ метрика на $M \times N$.

б) Доказати да ако су $U \subset M$ и $V \subset N$ отворени скупови у M и N, респективно, онда је $U \times V$ отворен у $(M \times N, d)$. Доказати да ако су $F \subset M$ и $G \subset N$ затворени скупови у M и N, респективно, онда је $F \times G$ затворен у $(M \times N, d)$.

в) Нека је $A \subset M$ и $B \subset N$. Показати да је затворење од $A \times B$ једнак $\overline{A} \times \overline{B}$.

Задатак 1.7. Нека је $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0\}$. Који од следећих скупова су отворени у S и који су затворени у S:

S; $\{(x, y) \in S | x \geq 1\}$; $\{(x, y) \in S | x > 0\}$; $\{(1 + \frac{1}{n}, 1) | n \in \mathbb{N}\}$; $\{(\frac{1}{n}, 1) | n \in \mathbb{N}\}$?

Задатак 1.8. а) Нека је α ирационалан број. Доказати да је функција $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ непрекидна, где је f дата на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < \alpha; \\ x+1, & x > \alpha. \end{cases}$$

б) Доказати да не постоји инвертибилна непрекидна функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тако да је $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = -1$.

в) Доказати да постоји инвертибилна непрекидна функција $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ тако да је $h(-1) = 0, h(0) = 1, h(1) = -1$.

Задатак 1.9. Нека је $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ скуп права у $\mathbb{R}^n$ (права која пролази кроз 0 или једнодимензионалан потпростор у $\mathbb{R}^n$) и нека је $d : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty)$ дата

$$d(L_1, L_2) = \sqrt{1 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{||v||^2 \cdot ||w||^2}},$$

где су $v \in L_1$ и $w \in L_2$ не-нула вектори. Показати да је d метрика на $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.

Задатак 1.10. Нека је $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ скуп свих реалних низова

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{k},\ k = \min\{n \in \mathbb{N} | x_n \neq y_n\}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Доказати да је d метрика на скупу X.

Задатак 1.11. На скупу $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ дефинишимо $\frac{1}{\infty} = 0$ и $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Доказати да d метрика на $\mathbb{N}^*$.

Задатак 1.12. Који су од следећих скупова компактни:

а) $\{x \in \mathbb{R}^n |\ ||x|| \leq 1\}$ у $(\mathbb{R}^n, d_e)$;

б) $X = \left\{ A \in M_3 | \sum\limits_{i,j} |a_{i,j}| = 1 \right\}$ у M_3;

в) $Q \cap [0, 1]$ у $(\mathbb{R}, d_e)$;

г) $\{A \in M_3 |\ |a_{1,1}| + |a_{2,2}| + |a_{3,3}| = 1\}$ у M_3;

Задатак 1.13. Нека је $A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} | m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Одредити скуп $\overline{A}$.

Задатак 1.14. За подскуп A метричког простора кажемо да је нигде густ ако A нема унутрашњих тачака.

а) Који од скупова $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$ и $C = \{\frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\}$ су нигде густи?

б) Ако су $A_1, A_2, ...$ нигде густи скупови у метричком простору X и ако је $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, доказати да X није комплетан. (Ово тврђење је познато као *Bair*-ова теорема о категорији).

в) Доказати да је скуп $\mathbb{R}$ непребројив.

Задатак 1.15. Да ли је скуп $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup ((\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$ повезан?

Задатак 1.16. Нека је дат скуп $A = \{x \in C[0, 1] |\ x(t) \neq e^{\operatorname{arctg} t}$ за свако $t \in [0, 1]\}$.

а) Наћи $\operatorname{diam} A$.

б) Доказати да скуп A није повезан.

в) Доказати да су компоненте повезаности путно повезане.

г) Да ли је A комплетан?

д) Да ли је A компактан?

Задатак 1.17. Нека је дата функција $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на следећи начин

$$d(x, y) = \pi_2(y) - \pi_2(x).$$

а) Доказати да је d псеудометрика.

б) Одредити класе еквиваленције на којима је d метрика.

Задатак 1.18. Нека је дат скуп $B = \{f_a \in C[0,1] | 0 \leq a \leq \pi\}$, где је $f_a(t) = \sin at$ за $0 \leq t \leq 1$. Доказати да је B повезан у $(C[0,1], d_\infty)$.

Задатак 1.19. Нека су дати подскупови $A = \{f \in C[0,1] | f(\frac{1}{2}) \geq f(\frac{1}{4})\}$, $B = \{f \in C[0,1] | f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{4})\}$ и $C = \{f \in C[0,1] | f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{4})\}$ у $C[0,1]$. Испитати повезаност скупова $A \cup B$ и $B \cup C$.

Задатак 1.20. Нека је $C[0,1]$ простор непрекидних функција $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ и на њему су дате две метрике $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$ и $d(f,g) = d_\infty + |f(0) - g(0)|$. Нека је дата функција $Q : C[0,1] \to C[0,1]$ дефинисана на следећи начин $Q(f)(x) = e^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$.

а) Показати да је $Q : (C[0,1], d_\infty) \to (C[0,1], d_\infty)$ непрекидна.

б) Да ли су d_∞ и d еквивалентне метрике? Да ли је $Q : (C[0,1], d) \to (C[0,1], d)$ непрекидна?

в) Показати да Q има тачно једну фиксну тачку.

Задатак 1.21. Доказати да је $A = \{f \in C[0,2] | f([0,2]) \subset [0,2]\}$ затворен и ограничен у метричком простору $(C[0,2], d_\infty)$.

Задатак 1.22. Доказати да је (X, d_2), где је $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, \, y = \frac{1}{x^3}\}$, комплетан метрички потпростор простора $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Задатак 1.23. Доказати да је скуп $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ неповезан у $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Задатак 1.24. Доказати да не постоји непрекидна сурјективна контракција компактног метричког простора са више од две тачке на себе.

Задатак 1.25. Нека су на скупу X задате метрике d_1 и d_2 такве да је $d_1(x,y) \leq 2d_2(x,y), \forall x, y \in X$. Доказати:

а) Ако је $A \subset X$ отворен у простору (X, d_1), онда је A отворен у простору (X, d_2).

б) Ако је (X, d_2) повезан метрички простор, онда је то и (X, d_1).

Задатак 1.26. Нека је U отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. Доказати да постоји низ компактних скупова K_n таквих да је $K_n \subset K_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n = U$.

Задатак 1.27. Нека је K компактан, а U отворен подскуп еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ и нека важи $K \subset U$. Доказати да постоји компактан скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ такав да је $K \subset \operatorname{int} S \subset S \subset U$.

Задатак 1.28. Метрички простор X је сепарабилан ако у њему постоји највише пребројив свуда густ скуп. Доказати да су простори c_0 и c, свих реалних нула низова и свих конвергентних реалних низова, простора l_∞ сепарабилни, а да простор l_∞ није сепарабилан.

Задатак 1.29. Ако су F_1 и F_2 дисјунктни затворени скупови у метричком простору X, доказати да постоје дисјунктни отворени у X скупови G_1 и G_2 такви да је $F_1 \subset G_1$ и $F_2 \subset G_2$

Задатак 1.30. Ако је $f : X \to Y$ равномерно непрекидна функција и (x_n) Кошијев низ у X, доказати да је $(f(x_n))$ Кошијев низ у Y.

Задатак 1.31. Показати да Банахова теорема о непокретној тачки може да не важи ако се уместо услова да је f контракција стави услов $d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$ за свако $x_1, x_2 \in X$, за које је $x_1 \neq x_2$.

Задатак 1.32. Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека је $f : X \to X$ контракција. Ако је (x_n) низ у X дефинисан са $x_1 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3...$, и ако је x фиксна тачка пресликавања f, доказати да за свако $n \geq 2$ важи:

а) $d(x_n, x) \leq q^{n-1} d(x_1, x)$;

б) $d(x_n, x) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} d(x_2, x_1)$;

в) $d(x_n, x) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$.

Задатак 1.33. Применом Банахове теореме о непокретној тачки, доказати да низ (x_n) у $\mathbb{R}$, дефинисан са $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + \sin x_n), n = 1, 2, ...$ конвергира, а затим одредити његову граничну вредност.

Задатак 1.34. Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека је $f : X \to X$ такво пресликавање да је $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ контракција скупа X. Доказати да пресликавање f има јединствену фиксну тачку.

Задатак 1.35. Доказати да су за функцију $f : X \to Y$, где су X и Y метрички простори, следећа тврђења еквивалентна:

а) f је непрекидна на X;

б) $(f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)})$ за свако $A \subset X$);

в) $(f^{-1}(B^o)) \subset [f^{-1}(B)]^o$ за свако $A \subset X$.

Задатак 1.36. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно бијективно пресликавање компактног метричког простора X на метрички простор Y. Доказати да је $f^{-1} : Y \to X$ непрекидно пресликавање.

Задатак 1.37. Доказати да је у метричком простору (l^∞, d) скуп

$$S = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} | \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = 1\}$$

затворен и ограничен, али да није компактан.

Задатак 1.38. Нека је A отворен и повезан скуп у $(\mathbb{R}^n, d_2)$, (то јест нека је A област). Доказати да је A путно повезан.

Задатак 1.39. Доказати да ако путно повезан подскуп A метричког простора X има непразан пресек са скупом $B \subset X$ и скупом $X \backslash B$, да онда има непразан пресек и са скупом ∂B.

Задатак 1.40. Показати да ако је свака јединична кугла у метричком простору (X, d) компактан скуп, онда је X комплетан.

Задатак 1.41. Нека је X повезан метрички простор, $a, b \in X$ произвољне тачке и $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $x \in X$ тако да важи

$$\sum_{k=0}^{7} (f(a))^k (f(b))^{7-k} = 8(f(x))^7.$$

Задатак 1.42. Нека је $(B_Y(X)$ простор свих ограничених функција из метричког простора (X, d_X) у метрички простор (Y, d_Y) и метрика $d_\infty = \sup_{x \in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$ на $(B_Y(X)$. Ако је f_n конвергентан низ у $(B_Y(X), d_\infty$, онда за свако $x_0 \in X$ низ $(f_n(x_0))$ је конвергентан низ у Y. Испитати равномерну конвергенцију низа $f_n(x) = x^n$ у $B_{\mathbb{R}}([0, 1/2])$ и у $B_{\mathbb{R}}([0, 1])$.

Задатак 1.43. Доказати да је функција $F : C[0, 1] \to \mathbb{R}, F(f) = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ непрекидно пресликавање.

Задатак 1.44. Нека је (X, d) метрички простор и $A, B \subset X$ непразни и дисјунктни. Дефинишимо функцију $f : X \to \mathbb{R}, f(x) = |d(x, A) - d(x, B)|$.

а) Ако је X компактан, онда постоји $m = \min_{x \in X} f$ и важи $m \leq d(A, B)$.

б) Ако је X повезан, онда је $m = 0$.

в) Ако је X компактан и повезан, онда постоји $a \in X$ тако да је $f(X) = [0, f(a)]$.