Математички факултет

Универзитет у Београду

Комплексни бројеви

Златко Лазовић

29. март 2017.

Глава 1

Комплексни бројеви

1.1 Теоријски увод

Једноставна једначина $x^2+1=0$ нема решења у скупу реалних бројева. Да би отклонили овај недостатак реалних бројева решаваћемо једначину у скупу комплексних бројева у коме се реални бројеви налазе као подскуп. Комплексни бројеви су изрази облика $x+iy$, где су x и y реални бројеви, а симбол i зовемо имагинарна јединица која има својство $i^2=-1$.

Код комплексног броја $z=x+iy$, реалан број x је његов реални део (пише се $x=\mathrm{Re}(z)$), а реалан број y је његов имагинаран део (пише се $y=\mathrm{Im}(z)$).

За комплексан број $z=x+iy$ је њему конјугован број $\overline{z}=x-iy$.

Модул комплексног броја $z=x+iy$ је (ненегативан) број $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Под n-тим кореном броја z подразумевамо сваки комплексан број чији је n-ти степен једнак z.

С обзиром да је $i^2=-1$, важи да је $i^3=i^2\cdot i=-i$, затим, $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, итд. Математичком индукцијом се може доказати да важи

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\quad k=0,1,2,3,\dots$$

Нека је у равни σ задат Декартов правоугли координатни систем Oxy, чиме је свакој тачки додељен уређен пар реалних бројева. Пресликавање

$$T:\mathbb{C}\to\sigma,\ \mathbb{C}\ni z=x+iy\to T(x,y)\in\sigma$$

је бијекција и њоме сваком комплексном броју додељујемо једну тачку равни σ и обратно, свака тачка равни σ је слика тачно једног комплексног броја, (слика 2). Осу Ox називамо реалном осом, а Oy имагинарном осом.

Раван σ зовемо комплексна раван и за сваки комплексан број $z = x + iy$ у тој равни важе следеће особине:
1° Конјугован број $\overline{z} = x - iy$ се добија симетријом тачке z у односу на реалну осу (слика 3).

2° Комплексан број $-z$ се добија симетријом тачке z у односу на тачку 0 (слика 4).

3° Модул $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ је растојање између тачака z и 0 (слика 5).

4° Вектор положаја тачке $z_1 + z_2$ једнак је збиру вектора положаја тацхака z_1 и z_2 (слика 6).

5° Растојање између тачака које одговарају комплексним бројевима z_1 и z_2 једнако је модулу разлике та два броја, $|z_1 - z_2|$ (слика 7).

6° Скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за који важи $|z - z_0| = R$, где је z_0 дати комплексан број, јесте кружна линија са центром у z_0 и полупречником R (слика 8).

7° Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у тригонометријском облику

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја (пише се $\arg z$)

(слика 9).

Производ два комплексна броја $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ је

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi)\big),$$

где $l \in \{-1, 0, 1\}$ бирамо такво да $\varphi_1 + \varphi_2 + 2l\pi \in (-\pi, \pi]$.

Сваки комплексан број $z \neq 0$ се може на јединствен начин записати у поларном облику

$$z = re^{i\varphi},$$

где је $r = |z|$ модул и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ аргумент комплексног броја, при чему је $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Према томе, важи

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Нека је дата тачка T у комплексној равни која одговара комплексном броју $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Тачку T' која одговара комплексном броју za, где је $a = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, можемо добити ротацијом тачке T око 0 за оријентисани угао α (слика 10).

(*Муаврова формула*) Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, онда за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.1}$$

Нека је дат комплексни број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Његови различити n-ти корени су

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{1.2}$$

Нека је $n \in \mathbb{N}, \varphi \in (-\pi, \pi]$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тачке у комплексној равни које одговарају n-тим коренима комплексног броја z припадају кружној линији полупречика $\sqrt[n]{r}$ са центром у координатном почетку и представљају темена правилног n-тоугла, чије једно теме одговара комплексном броју $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$(слика 11).

Решења квадратне једначине $x^2 + 9 = 0$ су $x_{1,2} = \pm 3i$. Често се пише $x^2 = -9 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. Међутим, овде је некоректан запис $\sqrt{-9}$ јер под кореном је негативан број. Али, да би једноставније решили задатак и са краћим записом, намерно ћемо правити ту грешку.

За сваки комплексан број $z = a + ib$ важи:
1° $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2a$;
2° $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 2ib$;
3° $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
4° $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
5° $|z^2| = |z|^2$;
6° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
7° $|\overline{z}| = |z|$;
8° $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

1.2 Решени задаци

1.2.1. Израчунати $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ и $z_1 - z_2$ ако је $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 1 - 3i$.

Решење. Из дефиниције сабирања, одузимања и множења комплексних бројева налазимо

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 3 + 4i + 1 - 3i = 4 - i, \\ z_1 - z_2 &= 3 + 4i - (1 - 3i) = 2 + 7i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (3 + 4i)(1 - 3i) = 15 - 5i. \end{aligned}$$

$\triangle$

1.2.2. Нека је $z = 3 - 4i$. Означити у комплексној равни тачке које одговарају комплексним бројевима:
а) z б) $-\overline{z}$ в) $z - 2$ г) $z + 3i$ д) iz.

Решење. а) слика 15; б) слика 16; в) слика 17; г) слика 18; д) слика 19.

$\triangle$

1.2.3. Одредити у комплексној равни скуп тачака које задовољавају релације:
а) $|z + i| = |z - 1|$; б) $1 < |z - i| < 2$.

Решење. а) Комплексни бројеви који задовољавају једначину $|z - (-i)| = R$ налазе се на кружници полупречника R са центром у $z_0 = -i$, а комплексни бројеви који задовољавају једначину $|z - 1| = R$ налазе се на кружници полупречника R са центром у $z_1 = 1$. Према томе, комплексни бројеви за које важи $|z + i| = |z - 1|$ су они који су у комплексној равни подједнако удаљени од тачака $z_0 = -i$ и $z_1 = 1$, односно налазе се на симетрали дужи која спаја тачке z_0 и z_1 (слика 20).
б) Решење неједначине $1 < |z - i|$ чине сви комплексни бројеви ван круга полупречника 1 са центром у $z_0 = i$, а решење неједначине $|z - i| < 2$ чине сви комплексни бројеви унутар круга полупречника 2 са центром $z_0 = i$. Коначно, решење почетне неједначине чине комплексни бројеви унутар кружног прстена (слика 21).

$\triangle$

1.2.4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја $z = \dfrac{7+2i}{4-3i}$.

Решење. Пошто је

$$\frac{7+2i}{4-3i} = \frac{7+2i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(7+2i)(4+3i)}{4^2-(3i)^2} = \frac{22+29i}{25} = \frac{22}{25}+i\frac{29}{25},$$

то је $\mathrm{Re}(z) = \frac{22}{25}$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{29}{25}$. △

1.2.5. Колико има целих бројева n за које је $(n+i)^4$ цео број?

Решење. Важи следеће $(n+i)^4 = (n^2+2in+i^2)^2 = (n^2+2in-1)(n^2+2in-1) = n^4+4in^3-6n^2-4in+1 = n^4-6n^2+1-4n(n^2-1)i$. Да би $(n+i)^4$ био цео број мора бити пре свега реалан, а то важи ако је $4n(n^2-1)=0$. Последња једнакост је задовољена ако и само ако $n \in \{0,-1,1\}$. За такве вредности n израз $(n+i)^4$ је цео број. △

1.2.6. Решити једначину $ix^2-4x+i=0$.

Решење. Корени једначине $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c комплексни бројеви) добијају се помоћу познате формуле $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ако применимо ово на нашу једначину добијамо

$$x_{1,2} = \tfrac{4\pm\sqrt{16-4i^2}}{2i} = \tfrac{4\pm\sqrt{20}}{2i} = \tfrac{4\pm2\sqrt{5}}{2i} = \left(-2\pm\sqrt{5}\right)i.$$

△

1.2.7. Нека је $S = i^n + i^{-n}$, где је n цео број. Које све вредности S може имати?

Решење. Знамо да је $i^{4k-3}=i$, $i^{4k-2}=-1$, $i^{4k-1}=-i$, $i^{4k}=1$ и $i^{-(4k-3)} = -i$, $i^{-(4k-2)}=-1$, $i^{-(4k-1)}=i$, $i^{-4k}=1$. Према томе, за $n=4k-3$, $n=4k-2$, $n=4k-1$, $n=4k$ добијамо за S редом следеће вредности $0,-2,0$ и 2. △

1.2.8. Наћи све комплексне бројеве који су конјуговани свом квадрату.

Решење. Потребно је наћи све комплексне бројеве за које важи $z^2=\overline{z}$. Запишимо број као $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Заменом у једначину добијамо $(x+iy)^2 = x-iy$, а одатле $x^2+i2xy-y^2 = x-iy$. Ако изједначимо реалне и имагинарне делове добићемо систем $x^2-y^2=x$, $2xy=-y$. Посматрајмо другу једначину. Ако је $y\neq 0$, онда је $x=-\frac{1}{2}$, па из прве једначине следи да је $\dfrac{1}{4}-y^2 = -\dfrac{1}{2}$, а одатле је $y_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ако је $y=0$, онда је $x^2=x$, односно $x=0$ или $x=1$.

Тражени комплексни бројеви су $z_1 = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=0$ и $z_4=1$. △

1.2.9. Решити једначину $z|z|+4z+5\overline{z}+2i=0$ у скупу комплексних бројева.

Решење. Представимо комплексан број као $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Тада је

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} + 4(x+iy) + 5(x-iy) + 2i = 0,$$

односно

$$x\sqrt{x^2+y^2} + 9x + i\left(y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2\right) = 0.$$

Ако изједначимо реални и имагинарни део са 0, добијамо систем

$$\begin{aligned} x\sqrt{x^2+y^2} + 9x &= 0, \\ y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Овај систем је еквивалентан са следећим системом

$$\begin{aligned} x\left(\sqrt{x^2+y^2} + 9\right) &= 0, \\ y\sqrt{x^2+y^2} - y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Из прве једначине следи да је $x = 0$ и ако то заменимо у другу једначину добијамо $y\sqrt{y^2} - y + 2 = 0$, односно $y|y| - y + 2 = 0$. Ако је $y \geq 0$, онда једначина $y^2 - y + 2 = 0$ нема реалних решења, а ако је $y < 0$, онда једначина $-y^2 - y + 2 = 0$ има решења $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$. Решење $y_2 = 1$ не узимамо у обзир јер y мора бити негативно, стога је $y = -2$. Добили смо да је $x = 0$ и $y = -2$. Решење једначине је $-2i$. △

1.2.10. Упростити израз $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^6$.

Решење. Први начин: Применом једнакости $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ добијамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 &= \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)^3 + \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right)^3 = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^3 + \left(\frac{-2i}{2i}\right)^3 \\ &= (-1)^3 + (-1)^3 = -1 - 1 = -2. \end{aligned}$$

Други начин: Рационалисањем израза у заградама добијамо

$$\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

а одатле

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = i^6 + (-i)^6 = -1 - 1 = -2.$$

△

1.2.11. Израчунати $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2014}$.

Решење. Први начин: Рационалисањем израза $\dfrac{1+i}{1-i}$ добијамо

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Према томе имамо

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014} = i^{2014} = i^{2012} \cdot i^2 = (i^4)^{503} \cdot i^2 = -1.$$

Други начин: На основу једнакости $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$ имамо

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2014} = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right)^{1007} = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{1007} = (-1)^{1007} = -1.$$

$\triangle$

1.2.12. Решити једначину $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = 1.$

Решење. За $x \neq -i$ једначина је еквивалентна једначини $(1+ix)^4 = (1-ix)^4$, тј. $8ix + 8i^3x^3 = 0$, односно $8ix(x^2-1) = 0$. Решења последње једначине су $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$. $\triangle$

1.2.13. Записати комплексан број $z = -\sqrt{3} - i$ у тригонометријском облику.

Решење. Први начин: Из записа можемо видети да је $\mathrm{Re}(z) = -\sqrt{3}$ и $\mathrm{Im}(z) = -1$. Израчунајмо прво модул $r = |z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Затим, у комплексном броју издвојимо модул и добијамо $z = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)$. С обзиром да је тригонометријски облик комплексног броја $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, потребно је наћи аргумент $\varphi \in (-\pi, \pi]$ такав да је $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$. На основу тригонометријског круга можемо закључити да је $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ (слика 12).

Стога је тригонометријски запис посматраног комплексног броја

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Други начин: Модул је $|z| = 2$, а аргумент означимо са $\varphi = \arg z$. Налазимо $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, а одавде $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ или $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$.

Због $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = -\dfrac{1}{2}$, имамо да је $\varphi = -\dfrac{5\pi}{6}$. Тригонометријски облик комплексног броја је $z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. $\triangle$

1.2.14. Записати комплексан број $z = -1 + i$ у тригонометријском облику.

Решење. Користећи формулу $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $(z = a + ib)$, добијамо да је модул једнак $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Комплексан број можемо записати као $z = \sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, одакле следи да је $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Аргумент комплексног броја је $\arg z = \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, па је $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (слика 13).

$\triangle$

1.2.15. Комплексан број $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$ записати у тригонометријском облику.

Решење. Због $(1+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2 + 2\cos\alpha = 2(1+\cos\alpha) = 2\cdot 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ имамо да је $|z| = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}$, јер је $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$. Затим, $\cos\varphi = \dfrac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Стога је $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$, па је $z = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. $\triangle$

1.2.16. Комплексан број $z \neq 0$ записан је у тригонометријском облику, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Записати у тригонометријском облику број $\dfrac{1}{z}$.

*Решење. **Први начин:*** Нека је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тада је

$$\frac{1}{z} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1} = (re^{i\varphi})^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Други начин: Нека је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тада је

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$

$\triangle$

1.2.17. Број $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ написати у тригонометријском облику.

Решење. Модул броја z је $|z| = \sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = 2$, па се може записати $z = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. Потребно је наћи аргумент φ за које је $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ и $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Како је $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, онда је $\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}}{2\sqrt{2}-2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2(\sqrt{2}-1)} = 1$, $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$. Према томе, $2\varphi = \frac{\pi}{4}$. Добили смо тригонометријски облик

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

$\triangle$

1.2.18. Ако је $z_1 = (-1-i\sqrt{3})/2$ и $z_2 = (-1+i\sqrt{3})/2$, израчунати $z_1^3 + z_2^3$.

Решење. Први начин. Тражени збир је једнак

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2) = (z_1+z_2)((z_1+z_2)^2 - 3z_1z_2).$$

Како је

$$z_1 + z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -1$$

$$z_1z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-(i\sqrt{3})^2}{4} = 1,$$

добијамо $z_1^3 + z_2^3 = (z_1+z_2)((z_1+z_2)^2 - 3z_1z_2) = (-1)(1-3) = 2$.

Други начин: Задатак се може решити и ако уочимо да је $z_1 = -e^{i\pi/3}$, а $z_2 = -e^{-\pi/3}$. Одатле следи да је $z_1^3 = -e^{i\pi} = 1$, и $z_2^3 = -e^{i\pi} = 1$, односно $z_1^3 + z_2^3 = 2$. $\triangle$

1.2.19. Средити израз $\frac{6\cos\frac{\pi}{6} + 6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3}}$.

Решење. Први начин: Бројилац датог израза је једнак $6\cos\frac{\pi}{6} + 6i\sin\frac{\pi}{6} = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$, а именилац $2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Одавде је

$$\frac{6\cos\frac{\pi}{6} + 6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{6e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = 3e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})} = 3e^{i\pi\frac{1-4}{6}} = 3e^{-\frac{\pi}{2}i} = -3i.$$

Други начин: Рационалисањем израза добијамо

$$\begin{aligned}\frac{6\cos\frac{\pi}{6}+6i\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}} &= \frac{6\frac{\sqrt{3}}{2}+6i\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2})+2i\frac{\sqrt{3}}{2}}=3\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= 3\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= 3\frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i-\frac{3}{4}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=-3i.\end{aligned}$$

△

1.2.20. Израчунати $\left(\sqrt{3}-i\right)^{36}$.

Решење. Први начин: Представимо комплексан број $z=\sqrt{3}-i$ у тригонометријском облику. С обзиром да је $|z|=2$ и $\arg z=-\frac{\pi}{6}$, имамо

$$z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Применом Муаврове формуле добијамо

$$z^{36}=2^{36}\left(\cos\left(-36\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-36\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)=2^{36}\left(\cos(-6\pi)-i\sin(-6\pi)\right)=2^{36}.$$

Други начин: На основу једнакости $\left(\sqrt{3}-i\right)^{3}=-8i$ имамо

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{36}=\left(\left(\sqrt{3}-i\right)^{3}\right)^{12}=(-8i)^{12}=2^{36}.$$

△

1.2.21. Израчунати z^{12}, где је z комплексан број који задовољава једначину $z^2+z+1=0$.

Решење. Решења једначине $z^2+z+1=0$ су $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Запишимо решења у тригонометријском облику $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ и $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$. Одавде следи да је

$$z_1^{12}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{12}=\cos(8\pi)+i\sin(8\pi)=1,$$

$$z_2^{12}=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{12}=\cos(16\pi)+i\sin(16\pi)=1.$$

Решење је $z=1$. △

1.2.22. Наћи вредност комплексне функције $f(z) = \left(\dfrac{z}{1-i}\right)^{20}$ у тачки $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Решење. Први начин: Запишимо комплексне бројеве $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ и $z_2 = 1-i$ у тригонометријском облику. За број z_1 је $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$ и $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$, па је $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, а за z_2 је $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ и $\arg z_2 = -\dfrac{\pi}{4}$, па је $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Коначно,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{z}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)}\right)^{20} \\
&= \frac{2^{20}(\cos 20\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 20\cdot\frac{\pi}{3})}{2^{10}\left(\cos(-20\cdot\frac{\pi}{4}) + i\sin(-20\cdot\frac{\pi}{4})\right)} = 2^{10}\cdot\frac{\cos 2\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 2\cdot\frac{\pi}{3}}{\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)} \\
&= 2^{10}\cdot\frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+0} = -2^{10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

Други начин: На основу чињенице да је $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$ и $(1-i)^2 = -2i$ имамо

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{20}}{(1-i)^{20}} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{18}\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{((1-i)^2)^{10}} \\
&= \frac{\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right)^6\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{((1-i)^2)^{10}} = \frac{(-8)^6\left(-2+2i\sqrt{3}\right)}{(-2i)^{10}} = \frac{8^6\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{-2^9} \\
&= 2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

△

1.2.23. Израчунати збирове $C_n = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots\ldots + \cos n\varphi$ и $S_n = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

Решење. Посматрајмо збир

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \\
&= 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \ldots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\
&= 1 + z + z^2 + \ldots + z^n,
\end{aligned}$$

где је $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Како је

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, & z \neq 1; \\ n+1, & z = 1, \end{cases}$$

имамо за $\varphi \neq 2k\pi$

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1}}{1-(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \\
&= \frac{1-\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2})} \\
&= \frac{2\sin\frac{n+1}{2}\varphi\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi - i\cos\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2})} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\right) \\
&\quad + i\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{n}{2}\varphi + i\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n}{2}\varphi.
\end{aligned}$$

Изједначавањем реалних, односно имагинарних делова налазимо

$$C_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{n}{2}\varphi \quad \text{и} \quad S_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n}{2}\varphi.$$

Ако је $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, онда је $C_n + iS_n = n+1$, па је $C_n = n+1$ и $S_n = 0$.

△

1.2.24. Наћи све четврте корене броја $z = -1 + i$.

Решење. Запишимо комплексан број z у тригонометријском облику. Модул је $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, па је $z = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Одавде видимо да је $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, па је $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Стога је, на основу формуле (1.2),

$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Према томе,

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right),\\
z_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right),\\
z_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{16}+\pi\right)\right)\\
&= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\right),\\
z_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right),
\end{aligned}$$

где смо применили

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) &= \cos\left(\frac{13\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right),\\
\cos\left(-\frac{13\pi}{16}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{16}+\pi\right),\\
\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right) &= \sin\left(\frac{13\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right),\\
\sin\left(-\frac{13\pi}{16}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{16}+\pi\right),\\
\sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{16}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Како је $|z_k| = \sqrt{2}$ за све $k\in\{0,1,2,3\}$, а аргументи се добијају додавањем аргументу $\arg z_0 = \dfrac{3\pi}{16}$ редом $\dfrac{\pi}{2}$, $-2\cdot\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$, четврти корени броја $-1+i$ представљају у комплексној равни темена квадрата, која се налазе на кружној линији полупречника $\sqrt[8]{2}$ са центром у координатном почетку (слика 14).

△

1.2.25.ДОДАТИ СЛИКУ Нека су z_1 и z_2 два наспрамна темена једног квадрата у комплексној равни, и z_3 и z_4 остала два наспрамна темена. Доказати $z_3 z_4 = \dfrac{z_1^2 + z_2^2}{2}$.

Решење. Изразимо z_3 и z_4 преко z_1 и z_2. Означимо пресек дијагонала квадрата са $z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$, (слика 23). Ако посматрамо комплексне бројеве $z_2 - z_0$ и $z_4 - z_0$ видимо да се комплексан број z_4 добија ротацијом комплексног броја z_2 око z_0 за угао $\frac{\pi}{2}$ у супротном смеру од смера казаљке на сату. Имамо $z_4 - z_0 = (z_2 - z_0)e^{i\frac{\pi}{2}} = (z_2 - z_0)\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = (z_2 - z_0)i$. Одавде

$$z_4 = z_0 + (z_2 - z_0)i = \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(z_2 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)i = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_2 - z_1}{2}i.$$

Ако посматрамо комплексне бројеве $z_1 - z_0$ и $z_3 - z_0$ видимо да се комплексан број z_3 добија ротацијом комплексног броја z_1 око z_0 за угао $\frac{\pi}{2}$ у супротном смеру од смера казаљке на сату. Према томе

$$z_3 - z_0 = (z_1 - z_0)e^{i\frac{\pi}{2}} = (z_1 - z_0)\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = (z_1 - z_0)i.$$

Одавде

$$z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)i = \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(z_1 - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)i = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2}i.$$

Добили смо

$$\begin{aligned}
z_3 z_4 &= \left(\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_2 - z_1}{2}i\right)\left(\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2}i\right) \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^2}{4} - \frac{(z_2 - z_1)^2}{4}i^2 = \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{4} + \frac{z_2^2 - 2z_1 z_2 + z_1^2}{4} \\
&= \frac{z_1^2 + z_2^2}{2}.
\end{aligned}$$

△

1.2.26. Израчунати за $n \geq 2$ следећи производ

$$\left[1 + \frac{1+i}{2}\right]\left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right].$$

Решење. Због $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n} = \left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}$, имамо

$$\left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^2\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1+\frac{1+i}{2}\right]\left[1+\frac{i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}\right]\\
&= \frac{1+\frac{1+i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\left[1-\frac{i}{2}\right]\left[1+\frac{i}{2}\right]\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^2\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n-1}\right]\\
&= \frac{1+\frac{1+i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\left[1-\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n}\right] = \frac{3+i}{2-i}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right) = (1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right).
\end{aligned}$$

Искористили смо чињеницу да је $i^{2^n} = 1$ за $n \geq 2$. △

1.3 Задаци за вежбу

1.3.27. Израчунати $|z|$ (модул комплексног броја z), ако је $z = \frac{(2-i)(1+i)}{3-i}$.

Решење. $|z| = 1$. △

1.3.28. Израчунати $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{2000}$.

Решење. Збир је једнак 0. △

1.3.29. Наћи вредност збира $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{10}$ ако је $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Решење. Вредност збира је $\frac{1+i}{2-\sqrt{2}}$. △

1.3.30. Комплексан број z има својство да је $\mathrm{Re}(z)$ четири пута већи од $\mathrm{Im}(z)$. Колико је пута $\mathrm{Re}(z^2)$ већи од $\mathrm{Im}(z^2)$?

Решење. 1,875 пута. △

1.3.31. Израчунати $(1 + i\sqrt{3})^9 + (\sqrt{3} - i)^9$.

Решење. $2^9(-1 + i)$. △

1.3.32. Ако је комплексан број $z = x + iy\,(x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ такав да је $|z| + \overline{z-1} = 0$, израчунати $2x - y$.

Решење. $2x - y = 1$. △

1.3.33. Израчунати $\left(\dfrac{3}{1+i} + \dfrac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Решење. 2^{24}. △

1.3.34. Ако комплексан број z задовољава једнакост $z + 2\overline{z} = 12 + 3i$, наћи $|z|$.

Решење. $|z| = 5$. △

1.3.35. Наћи све шесте корене броја $i - \sqrt{3}$.

Решење. $z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. △

1.3.36. Решити једначину $z^5 = (1 - z)^5$.

Решење. $\frac{1}{2}\left(1 - i\operatorname{tg}\frac{k\pi}{5}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. △

1.3.37. Решити по z једначину $z + 2\overline{z} = 6 - i$.

Решење. $z = 2 + i$. △

1.3.38. Дат је компексан број $z_1 = 2 - 2i$. Одредити комплексан број $z = x + iy$ који задовољава $\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = 18$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z_1}\right) = \frac{1}{13}$.

Решење. $z = 3 + 4i$. △

1.3.39. Ако је $z + \frac{1}{z} = 1$, израчунати

а) z^3;

б) $z^{1000} + \frac{1}{z^{1000}}$.

Решење. а) -1; б) -1. △

1.3.40. Шта у равни представља скуп парова (x, y) таквих да је $z = x+iy$ и

а) $\operatorname{Re}(\mathrm{z}) + \operatorname{Im}(\mathrm{z}) < 1$;

б) $|z| = 2$;

в) $|z - 1| = 1$;

г) $z \cdot \overline{z} + (1 + i)z + (1 - i)\overline{z} = 0$;

д $|z - 2| + |z + 2| = 4$;

ђ) $|z + 2| + |z - 2| = 10$;

е) $|z + 5| - |z - 5| = 8$.

Решење. а) Полураван "испод"праве $y = 1 - x$; б) Круг са центром у $(0, 0)$ полупречника 2; в) Круг са центром у $(1, 0)$ полупречника 1; г) Круг са центром у $(-1, -1)$ полупречника $\sqrt{2}$; д) $z = 0$; ђ) Елипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$; е) Хипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. △

1.3.41. Решити систем једначина:
а) $\left|\dfrac{z-12i}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1$;
б) $|z+1| = |z+4| = |z-i|$.

Решење. а) $z_1 = 6+8i$, $z_2 = 6+17i$; б) $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$. △