

1. Нека су дати скупови

$$A = \left\{ \sin \left(\frac{5n-10}{4n+1} \pi \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{и} \quad B = \left\{ \frac{n^3(m+1)^m}{8(m^3+2n^3)(-m)^m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

- a) [6] Нађи $\sup A, \inf A, \min A$ и $\max A$ (ако постоје).
 - б) [6] Нађи $\sup B, \inf B, \min B$ и $\max B$ (ако постоје).
 - в) [3] Нађи $\sup(A \cup B), \inf(A \cup B), \min(A \cup B)$ и $\max(A \cup B)$ (ако постоје).
2. Нека је $0 < \varepsilon < 1$ и $a \in \mathbb{R}$. Низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је дефинисан на следећи начин:

$$x_1 = a, x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n, n \geq 1.$$

- a) [8] Доказати да је низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан.
 - б) [4] Ако са ξ означимо граничну вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, доказати да је ξ јединствено решење једначине $x - \varepsilon \sin x = a$.
3. Нека су дате функције $f, g: [-\frac{\pi}{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
- $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ (\sqrt{4+x} - 2e^{\frac{x}{8}})(\sin x)^{-2} + a, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x - x^2|), & x \geq 0 \\ b, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}.$$
- а) [4] Нађи константе a и b такве да функције f и g буду непрекидне на $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.
 - б) [6] За такве вредности a и b испитати диференцијабилност функције $f(x)g(x)$ на $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.
 - в) [5] За такве вредности a и b испитати равномерну непрекидност функције $f(x)g(x)$ на $[-\frac{\pi}{2}, +\infty)$.
4. [8] Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција таква да је $f'(x) > 0$ за све $x \in (a, b)$. Ако је $a \leq c < d \leq b$ и $f(c)f(d) > 0$ показати да постоји $\xi \in (c, d)$ такво да је

$$\frac{df(c) - cf(d)}{f(d) - f(c)} = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} - \xi.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.