

1. Израчунати интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$.

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^4+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{13}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln(n+1)}}$ в) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{4n^2+3n+e}{2(n+e)^2}$; г) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}$.

3. Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, +\infty). \end{cases}$$

а) Доказати да за Фуријеове коефицијенте $a_n, n \geq 1$, функције f на интервалу $(-\pi, \pi)$, важи да је

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\pi n^2}, \quad n \geq 1.$$

б) Развити функцију f у Фуријеов ред на интервалу $(-\pi, \pi)$.

в) Одредити суме редова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$