# Решења за Анализу 1 у року јун2

6.7.2019.

1. **Домен.** Одредимо домен дате функције. Како је $f(x) = -x + \ln \frac{|x|-1}{x}$, мора да важи $\frac{|x|-1}{x} > 0$ и $x \neq 0$, па имамо два случаја.

   $1^o$ Нека је $|x| - 1 > 0$ и $x > 0$. Решење овог система неједнакости је $x > 1$;

   $2^o$ Нека је $|x| - 1 < 0$ и $x < 0$. Решење овог система неједнакости је $-1 < x < 0$.

   Дакле, домен дате функције је $\mathcal{D}(f) = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, па имамо да је дата функција непрекидна на домену и има следећи облик.

$$f(x) = \begin{cases} -x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right), & x > 1 \\ -x + \ln\left(-1 - \frac{1}{x}\right), & -1 < x < 0 \end{cases}$$

**Знак.** Ако је $x > 1$, онда је $1 - \frac{1}{x} < 1$, па је $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$, а самим тим је и $f(x) < 0$.
Потребно је још испитати знак дате функције у случају $-1 < x < 0$. Погледајмо када је дата функција једнака нули.

$$0 = f(x) = -x + \ln\left(-1 - \frac{1}{x}\right) \iff -1 - \frac{1}{x} = e^x.$$

Уколико посматрамо графике функција $-1 - \frac{1}{x}$ и $e^x$ видимо да се они секу у тачки $a \in (-1, 0)$ и да је $-1 - \frac{1}{x} > e^x$ за $a < x < 0$, а $-1 - \frac{1}{x} < e^x$ за $-1 < x < a$. Дакле, закључујемо коначно да је $f(x) > 0$ за $x \in (a, 0)$, $f(x) < 0$ за $x \in (-1, a) \cup (1, +\infty)$ и $f(a) = 0$.

**Асимптоте.** Како је

$$\lim_{x \to -1+0} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 0-0} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1+0} = -\infty,$$

закључујемо да су праве $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$ вертикалне асимптоте дате функције. Даље, како за $x > 1$ имамо $f(x) = -x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, то је права $y = -x$ коса асимтота када $x \to +\infty$ и функција јој се приближава одоздо.

**Монотоност.** Први извод дате функције једнак је

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ -1 + \frac{1}{-1-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}, & -1 < x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{x^2-x-1}{x(x-1)}, & x > 1 \\ -\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Ако је $x > 1$, имамо да је $x(x-1) > 0$ па на знак првог извода утиче само $-(x^2 - x - 1)$. Нуле овог квадратног полинома су $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Како је $x_2 < 0$ добијамо да је $f'(x) > 0$ за $x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, затим $f'(x) < 0$ за $x \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ и $f'(x) = 0$ за $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Са друге стране, уколико је $-1 < x < 0$, знамо да је $x^2 + x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па како је $-x(x+1) > 0$ за свако $x \in (-1, 0)$, закључујемо да је $f'(x) > 0$ за $x \in (-1, 0)$.

Коначно, закључујемо да функција расте на $(-1, 0)$ и $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, опада на $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ и функција достиже локални максимум за $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

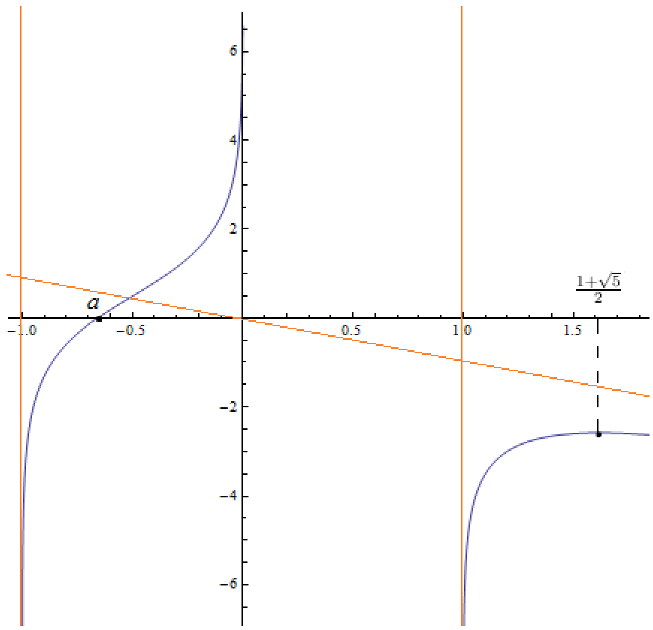
**Конвексност.** Други извод дате функције једнак је

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2}, & x > 1 \\ \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Уколико је $x > 1$ видимо да је $f''(x) < 0$. Са друге стране, ако је $-1 < x < 0$, видимо да је $f''(x) > 0$ за $x > -\frac{1}{2}$, $f''(x) < 0$ за $x < -\frac{1}{2}$ и $f''(x) = 0$ за $x = -\frac{1}{2}$.

Коначно, закључујемо да је дата функција конвексна на $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, конкавна на $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ и $\cup(1, +\infty)$ и $x = -\frac{1}{2}$ је превојна тачка.

**График.**




2. a) Индукцијом се непосредно проверава да је $a_n \in [-1, 0]$ за све $n \geq 1$. Користимо неједнакости које следе из конвексности одговарајућих функција:

$$e^x \geq x + 1 \text{ за } x \in \mathbb{R},$$

$$\arctan x \geq x \text{ за } x \leq 0,$$

при чему једнакост у оба случаја важи акко $x = 0$.

$$a_{n+1} = e^{\arctan a_n} - 1 \geq 1 + \arctan a_n - 1 \geq a_n.$$

Дакле, низ је монотон и ограничен, па има лимес $A \leq 0$.

$$A = e^{\arctan A} - 1 \geq 1 + \arctan A - 1 \geq A,$$

па једнакост важи и то повлачи $A = 0$.

б) Примењујемо Штолцову теорему.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n^{-1}}{n} &= \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}^{-1}-a_n^{-1})\\
&= \lim_{n\to+\infty}((e^{\arctan a_n}-1)^{-1}-a_n^{-1})\\
&= \lim_{n\to+\infty}((1+\arctan a_n+\frac{1}{2}\arctan^2 a_n+O(\arctan^3 a_n)-1)^{-1}-a_n^{-1})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\arctan^{-1} a_n((1+\frac{1}{2}\arctan a_n+O(\arctan^2 a_n))^{-1}-1)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\arctan^{-1} a_n(1-\frac{1}{2}\arctan a_n+O(\arctan^2 a_n)-1)\\
&= \lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}+O(\arctan a_n))\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Одавде следи $a_n \sim \frac{-2}{n}$.

в)

$$\frac{1}{n}\sin(2n+\sqrt[3]{a_n})=\frac{\sin 2n}{n}\cos\sqrt[3]{a_n}+\frac{\sin\sqrt[3]{a_n}}{n}\cos 2n.$$

$\sum\frac{\sin 2n}{n}$ конвергира по Дирихлеу; $\cos\sqrt[3]{a_n}$ је монотон (због а)) и ограничен, па $\sum\frac{\sin 2n}{n}\cos\sqrt[3]{a_n}$ конвергира по Абелу. Ова конвергенција је условна: $\left|\frac{\sin 2n}{n}\cos\sqrt[3]{a_n}\right|\sim\frac{|\sin 2n|}{n}$, а ред $\sum\frac{|\sin 2n|}{n}$ дивергира.

$$\left|\frac{\sin\sqrt[3]{a_n}}{n}\cos 2n\right|\le\frac{|\sin\sqrt[3]{a_n}|}{n}\sim\frac{|\sqrt[3]{a_n}|}{n}\sim\frac{\sqrt[3]{2}}{n^{4/3}},$$

па ред $\sum\frac{\sin\sqrt[3]{a_n}}{n}\cos 2n$ апсолутно конвергира. Одавде следи да $\sum\frac{1}{n}\sin(2n+\sqrt[3]{a_n})$ конвергира условно.

г) Радијус конвергенције је

$$R=\lim\frac{\sqrt[5]{a_{n+1}}}{\sqrt[5]{a_n}}=\lim\frac{\sqrt[5]{(-2)/(n+1)}}{\sqrt[5]{(-2)/n}}=1.$$

За $x=1$: $\sqrt[5]{a_n}x^n=\sqrt[5]{a_n}\sim-\frac{\sqrt[5]{2}}{n^{1/5}}$, па ред дивергира. За $x=-1$: $\sqrt[5]{a_n}x^n=(-1)^n\sqrt[5]{a_n}$, $\sqrt[5]{a_n}\nearrow 0$, па ред конвергира по Лајбницу. Дакле, област конвергенције је $[-1,1)$.

3. (а)

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt &= -\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}\cdot(-2te^{-t^2})dt\\
&= -\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}\cdot d\left(e^{-t^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t^2}}{t}\Big|_x^{+\infty}+\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt\right]\\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt.
\end{aligned}$$

Сада процењујемо $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt$ у односу на $e^{-x^2}x^{-2}$ применом Лопитала.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt}{e^{-x^2}x^{-2}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{-x^2}x^{-2}}{-2e^{-x^2}x^{-3}-2e^{-x^2}x^{-1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^{-1}+2x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Дакле, $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt=o(e^{-x^2}x^{-2})$, $x\to+\infty$. Следи:

$$\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x}+o(x^{-2})\right),\ x\to+\infty.$$

(б)

$$e^{x^2}\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\cos(x+x^{-1})}{2x}+o(x^{-2})=\frac{\cos x}{2x}\cos(x^{-1})-\frac{\sin(x^{-1})}{2x}\sin x+o(x^{-2}),\ x\to+\infty.$$

$\int^{+\infty}\frac{\cos x}{2x}dx$ конвергира по Дирихлеу; $\cos(x^{-1})\nearrow 1$, па $\int^{+\infty}\frac{\cos x}{2x}\cos(x^{-1})dx$ конвергира по Абелу; ова конвергенција је условна: $\left|\frac{\cos x}{2x}\cos(x^{-1})\right|\sim\frac{|\cos x|}{2x}$, а $\int^{+\infty}\frac{|\cos x|}{2x}dx$ дивергира. $\left|\frac{\sin(x^{-1})}{2x}\sin x\right|\le\frac{|\sin(x^{-1})|}{2x}\sim\frac{1}{2x^2}$, па $\int^{+\infty}\frac{\sin(x^{-1})}{2x}\sin x dx$ апсолутно конвергира по поредбеном критеријуму. $\int^{+\infty}o(x^{-2})dx$ такође конвергира по поредбеном критеријуму. Закључак је да $\int_1^{+\infty}\left(e^{x^2}\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt\right)dx$ условно конвергира.

4. Претпоставимо да постоји. $f'(x)=f(f(x))>0$, па је $f$ строго растућа. $f(x)>0$, па је $f'(x)=f(f(x))>f(0)>0$. Сада је $f(0)-f(-1)=\int_{-1}^0 f'(x)dx>\int_{-1}^0 f(0)dx=f(0)$, што је у контрадикцији са $f(-1)>0$. Дакле, не постоји описана функција.

5. Нека је $G(x):=\int_0^x g(t)dt$.

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)d(G(nx))=\frac{1}{n}\left(f(1)G(n)-f(0)G(0)-\int_0^1 G(nx)f'(x)dx\right).$$

$G(0)=0$ и $G(n)=\int_0^n g(x)dx=n\int_0^1 g(x)dx=n\int_{-0.5}^{0.5}g(x)dx=0$ због периодичности и непарности. Дакле,

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx=-\frac{1}{n}\int_0^1 G(nx)f'(x)dx.$$

$G(x+1)=\int_0^x g(t)dt+\int_x^{x+1}g(t)dt=\int_0^x g(t)dt+\int_{-0.5}^{0.5}g(x)dx=\int_0^x g(t)dt=G(x)$, па је и $G$ 1-периодична. Постоји $K$ тако да је $|G|\le K$ на $[0,1]$, па је $|G|\le K$ на $\mathbb{R}$. Постоји $L$ тако да је $|f'|\le L$ на $[0,1]$. Сада је

$$\left|\int_0^1 f(x)g(nx)dx\right|\le\frac{1}{n}KL\to 0,\ n\to+\infty.$$