Математички факултет Универзитета у Београду
Писмени испит из Анализе 1
06.07.2019.

1. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = -x + \ln\left(\frac{|x|-1}{x}\right).$$

2. Дат је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рекурентном везом $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = e^{\operatorname{arctg} a_n} - 1$ за $n \geq 1$.

   (а) [4] Испитати конвергенцију низа (a_n) и одредити лимес ако постоји.

   (б) [4] Доказати да постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $a_n \sim \frac{c}{n}$, $n \to +\infty$.

   (в) [4] Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(2n + \sqrt[3]{a_n}).$$

   (г) [3] Одредити област конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[5]{a_n} x^n$.

3. (а) [5] Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = e^{-x^2}\left(\frac{a}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

   (б) [10] Испитати обичну и апсолутну конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty} \left(e^{x^2} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) dx.$$

4. [15] Да ли постоји диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ таква да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f'(x) = f(f(x))$?

5. [15] Нека је $f \in C^1[0,1]$ и $g \in C(\mathbb{R})$ 1-периодична и непарна. Доказати да је

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x) g(nx) dx = 0.$$

Напомена: Студенти раде прва три задатка, као и један од задатака 4 или 5. Избор експлицитно нагласити. У угластим заградама је наведено колико поена носи сваки део задатака.