Писмени испит из Конвексне анализе **ЈУН 1 2020**

1. Означимо са P_n правилан n-тоугао у равни са центром у координатном почетку, чије је једно теме тачка $(3,0)$.
(а) Одредити поларни скуп P_n^*, за све $n \in \mathbb{N}$.
(б) Одредити функцију ослонца скупа P_8.
(в) Одредити Хаусдорфову удаљеност између скупова P_3 и P_6.

2. Кажемо да је скуп $C \subset \mathbb{R}^n$ *добар* ако за сваке две тачке $a, b \in C$ важи $\frac{a+b}{2} \in C$.
(а) Конструисати неки добар скуп C који није конвексан.
(б) Ако је скуп C затворен и добар, доказати да C мора бити конвексан.

3. Дати су компактни конвексни скупови A и B у простору $\mathbb{R}^n$, такви да координатни почетак припада унутрашњости сваког од њих. Доказати да за све $x \in \mathbb{R}^n$ важи релација:

$$p_{A\cap B}(x) = \max\{p_A(x), p_B(x)\},$$

где p_A, p_B и $p_{A\cap B}$ означавају одговарајуће функције удаљености.

4. Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ фиксиран конвексан скуп и нека су $X_1, \ldots, X_n \subset \mathbb{R}^2$, $n \geq 3$, конвексни скупови са својством да за свака три од њих постоји транслат скупа A (скуп $v + A$ за неки вектор v) који сече сва три скупа. Доказати да постоји транслат скупа A који сече све скупове $X_1, \ldots, X_n$.