! Још једна која нема асимптоту:

• $\ln|x^2-4x+3|$

1° D_f: $|x^2-4x+3|>0$

$x^2-4x+3\neq 0$

$(x-3)(x-1)\neq 0$

$D_f=(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

2° ПАР/НЕП/НИШТА ☺

3° НУЛЕ: $f(x)>0 \iff |x^2-4x+3|>1$

$\iff x^2-4x+3<-1 \lor x^2-4x+3>1$

$\iff x^2-4x+4<0 \lor x^2-4x+2>0$

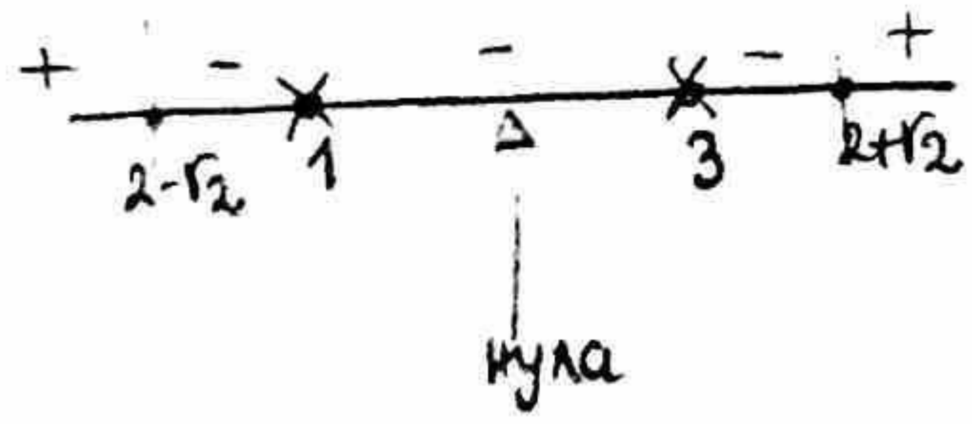
$(x-2)^2<0$ — немоћ

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

$x<2-\sqrt{2} \lor x>2+\sqrt{2}$

$f(x)>0 \iff x\in(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty)$

Морамо искључити рупе у домену



$f(x)=0 \iff |x^2-4x+3|=1$

$\iff \boxed{x=2} \lor \boxed{x=2-\sqrt{2} \lor x=2+\sqrt{2}}$

не заборави

$f(x)<0 \iff x\in(2-\sqrt{2},1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,2+\sqrt{2})$

4° АСИМПТОТСКО ПОНАШАЊЕ:

$+\infty$: $\ln|x^2-4x+3|\sim 2\ln|x|$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln|x^2-4x+3|}{\ln x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-4x+3)}{\ln x^2}\overset{\text{Лоп.}}{=}\right.$

$\Rightarrow$ нема К.А, нема Х.А. $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x^2-4x+3}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot 2x\right)^{-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x^2-4x+3}\cdot\frac{x^2}{2x}=1\left.\right)$

и слично у $-\infty$

строго: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln|x^2-4x+3|}{x}\overset{\text{Лоп.}}{=}0$, сл. $\lim\limits_{x\to-\infty}-\|-=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln|x^2-4x+3|-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{\ln(x^2-4x+3)}{x}}_{\to 0\text{ у }+\infty}-1\Big)\cdot\underset{\to+\infty}{x}\to-\infty$ $\Rightarrow$ нема ни К.А. ни Х.А !

$\to -1$

5° $f(x)=\ln(\underbrace{\operatorname{sgn}(x^2-4x+3)}\cdot(x^2-4x+3))$

$\neq 0$ на домену, па може извод са sgn као const ☺

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\ln|\underset{\to 0}{x^2-4x+3}|=-\infty$

$\to -\infty$

(исто $1+$ и $1-$!) $\Rightarrow \boxed{\text{В.А. } x=1}$

сл. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-\infty \Rightarrow \boxed{\text{В.А. } x=3}$

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{sgn}(x^2-4x+3)(x^2-4x+3)} \cdot (\mathrm{sgn}(\cdot)\cdot(\cdot))'$$

$$= \frac{1}{\cancel{\mathrm{sgn}(x^2-4x+3)}(x^2-4x+3)} \cdot \cancel{\mathrm{sgn}(x^2-4x+3)} \cdot (2x-4) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$$

(!!) $(\ln|t(x)|)' = \frac{t'(x)}{t(x)}$

за $t(x) \neq 0$

Знак $f'(x)$:

		1		2		3	
$2x-4$	$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-4x+3	$+$		$-$		$-$		$+$
f'	$\ominus$		$\oplus$		$-$		$\oplus$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

лок. max у 2

$f(2)=0$

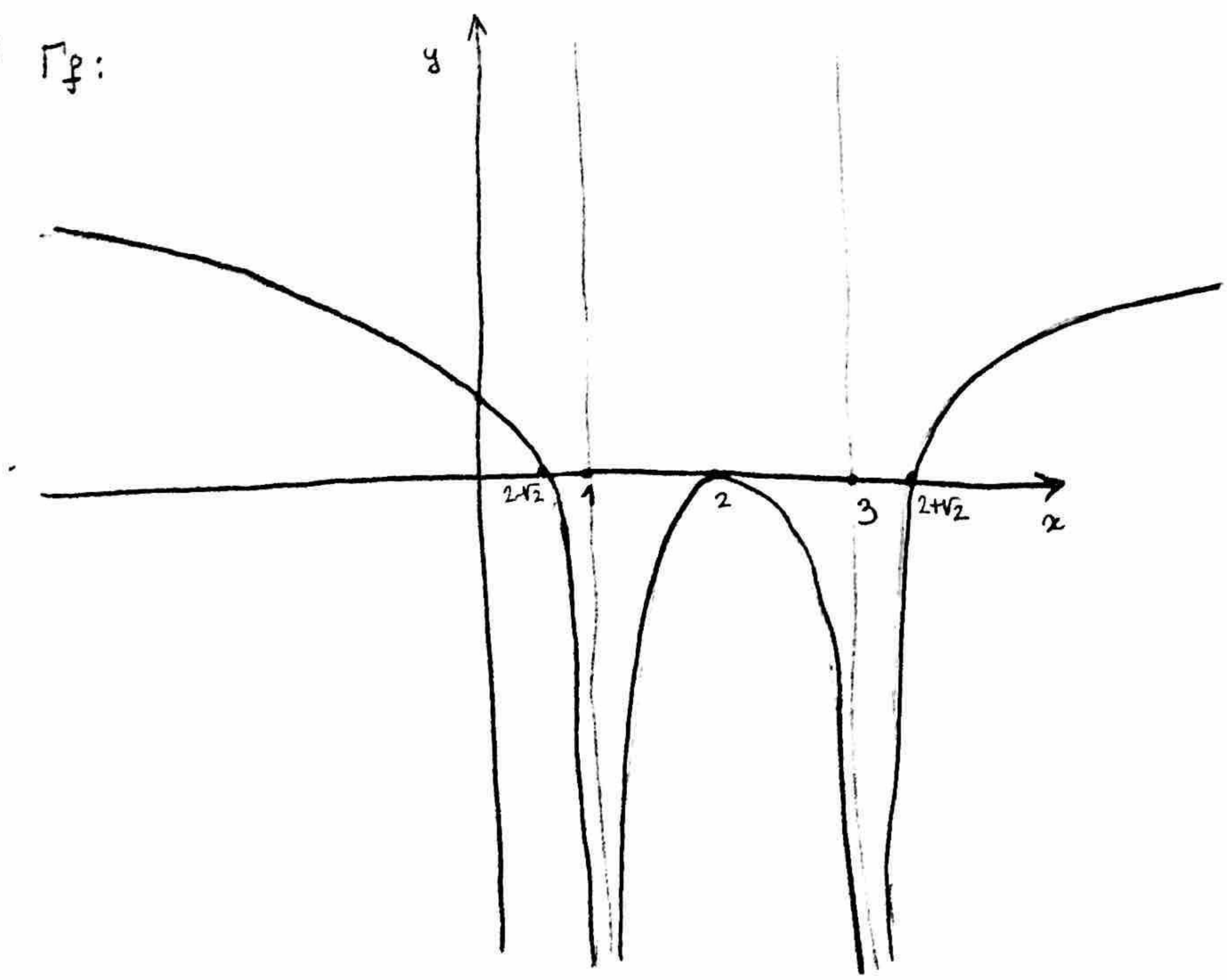
6° $f''(x) = \frac{1}{(\cdot)^2}\left(2\cdot(x^2-4x+3) - (2x-4)\cdot(2x-4)\right) = \frac{1}{(\cdot)^2}(2x^2-8x+6-4x^2-16+16x)$

$= \frac{1}{(\cdot)^2}(-2x^2+8x-10) = \frac{(-2)}{(\cdot)^2}\underbrace{(x^2-4x+5)}_{\substack{D<0 \\ + \text{ за } \forall x\in\mathbb{R}}}$

$\Rightarrow f''(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

$\Rightarrow f:\ \cap \ 1 \ \cap \ 3 \ \cap$

7° Γ_f:



(!!) симетрију у односу на 2

јер $\ln|x^2-4x+3| = \ln|(x-2)^2-1|$:)

* Примери: $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2-2x}$

1° D_f : $x(x-2) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)}$

2° НУЛЕ: $x=0,\ x=2$

ЗНАК: $\sqrt{\cdot} > 0$ увек

$-\quad 0 \quad 2 \quad +$

3° АСИМПТОТИКА: $\cancel{\lim_{x\to 0-} = 0}$ $\cancel{\lim_{x\to 2+} = 0}$ ма не треба јер су то тачке домена!

нема В.А. јер су $2, 0 \in D_f$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{нема К.А, нема Х.А.}}$

$\frac{\frac12\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{3!} = \frac{1}{16}$

Како се понаша?

$f(x) = x\cdot\sqrt{x^2-2x} = x\cdot|x|\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/2} = x\cdot|x|\left(1+\frac12\cdot\frac{-2}{x} - \frac18\cdot\frac{4}{x^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{-8}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$x\to+\infty$: $f(x) = x^2 - x - \frac12 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac1x\right)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \sim x^2,\ x\to+\infty}$

$x\to-\infty$: $f(x) = -x^2 + x + \frac12 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac1x\right)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) \sim -x^2,\ x\to-\infty}$

4° $f'(x) = \sqrt{x^2-2x} + x\cdot\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)$

$= \frac{x^2-2x+x^2-x}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}, \quad x \neq 0, 2$

$x(2x-3)$

$+++ \quad 0 \quad 3/2 \quad 2 \quad +++$

f: $\nearrow \quad \nearrow$

$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\overbrace{(2x-3)}^{\to -3}}{-x\underbrace{\sqrt{1-2/x}}_{\to +\infty}} = 0_+$ уз њу се лепи

$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x\overbrace{(2x-3)}^{\to 1}}{x\underbrace{\sqrt{1-2/x}}_{\to 0_+}} = +\infty$ уз њу се лепи

6° $f''(x) = \dfrac{(4x-3)\cdot\sqrt{x^2-2x} - (2x^2-3x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\;}}\cdot(2x-2)}{x^2-2x}$

$x \neq 0, 2$

$x \notin (0, 2)$

$$= \frac{1}{(x^2-2x)^{3/2}} \cdot \left((4x-3)(x^2-2x) - (2x^2-3x)\cdot(x-1)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(x^2-2x)^{3/2}}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(2x^3-6x^2+3x\right)}_{= x\cdot(2x^2-6x+3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

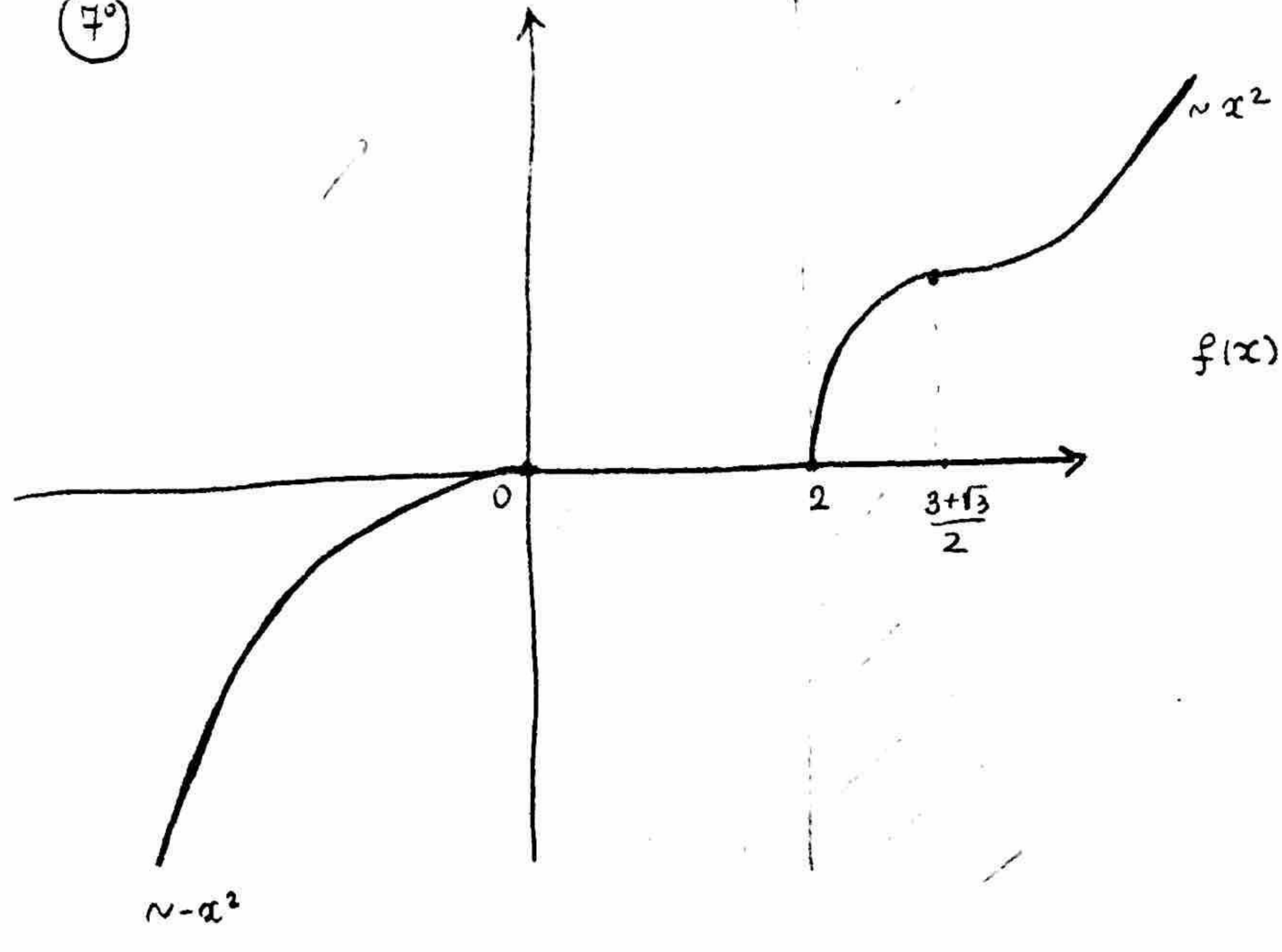
$-$ $-$ $-$ $+$

0 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 2 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

иду та x учине шунним

$\Rightarrow \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ je превојна

7°



* Испитати: $f(x) = -\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}$

[1] D_f: $x \neq 0$ $\quad \frac{2x}{x^2-1} \in \mathbb{R}$ $\quad x \neq \pm 1$ $\Rightarrow D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

[2] пар./непар./период – ништа!

[3] нуле и знак – врло тешко ☹ осте нешто!

☺ све изводе arcsin, arccos, $\log_a x$, arctgx ... 2^x научити !

[4] први извод:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x\cdot \operatorname{sgn} x} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{sgn} x} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\cdot\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{sgn} x + \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2+(2x)^2} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - 2\cdot\frac{(1+x^2)}{\underbrace{x^4-2x^2+1+4x^2}_{(x^2+1)^2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}, & x \in D_f \cap \mathbb{R}^+ \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}, & x \in D_f \cap \mathbb{R}^- \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}, & x \in (0,1)\cup(1,+\infty) \\ -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}, & x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0) \end{cases}$$

		-1		0		1	
f'	$-$	×	$-$	×	$+$	×	$-$
f	↘		↘		↗		↘

скица f: ↘ ↘ ↗ ↘

[5] Асимптотика: $-\infty, +\infty$, $-1^+/_-$, $0^+/_-$, $1^+/_-$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ – хориз. асимптоте (Х.А.) $\boxed{y=0}$ – права

Креде у боји!!!

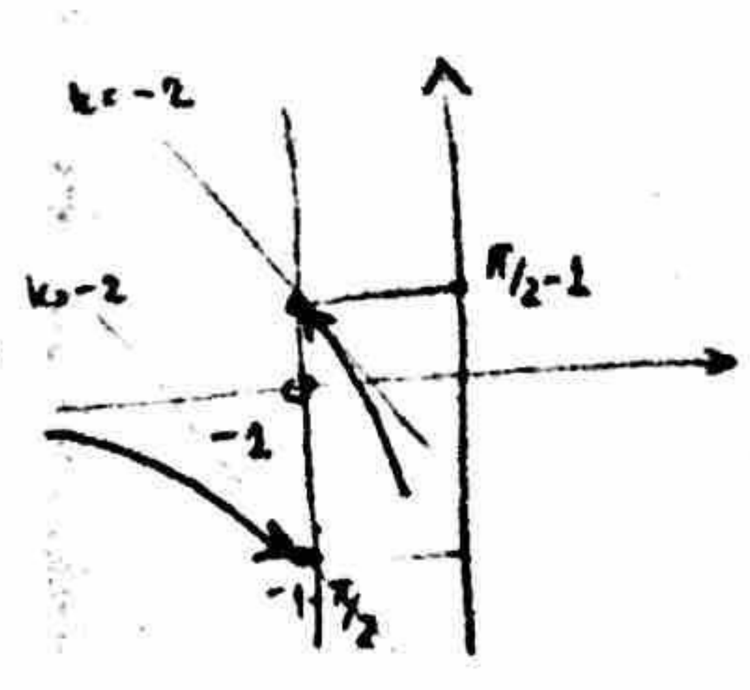
$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{-\frac{1}{|x|}}_{\to -\infty} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}}_{=0} = -\infty$ $\quad \boxed{\text{В.А. } x=0}$

$\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_-} -1 + \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\to -\infty}$ $= -1 - \pi/2$ – забада се! <0

$\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_+} -1 + \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\to +\infty}$ $= -1 + \pi/2$ – забада се! >0

Под којим углом???

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -1_-} f'(x) = \lim_{x\to -1_-}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right) = -1-1 = -2 \\ &\lim_{x\to -1_+} f'(x) = \dots = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+}\Big(\underbrace{-\frac{1}{|x|}}_{=-1} + \operatorname{arctg}\underbrace{\frac{2x}{x^2-1}}_{\to+\infty}\Big) = -1+\pi/2$$

$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = -1-\pi/2$$

Под којим углом улази ?

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1_+} f'(x) = \lim_{x\to 1_+}\frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)} = 0\\ &\lim_{x\to 1_-} f'(x) = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{хоризонтално се лепи !}$$

6 Други извод:

$$f''(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}\right)' = -2\operatorname{sgn} x\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{2}{(x^2+1)^2}\cdot 2x$$

$$= \begin{cases}\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\[2mm] -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

$x<0 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow f$ конкавна на $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$

$x>0$: $\quad f''(x) = \dfrac{-2(x^2+1)^2+4x^4}{x^3(x^2+1)^2} > 0$

$$\Leftrightarrow 4x^4-2x^4-4x^2-2>0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-4x^2-2>0$$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2-1>0 \qquad t_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2>1+\sqrt{2}$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{2}}}_{=\alpha} > 1$$

α - превојна тачка

$\Rightarrow$

3 Нуле и знак - са графика и из претходног дела !

$x\in(-\infty,-1)$ $f(x)<0$

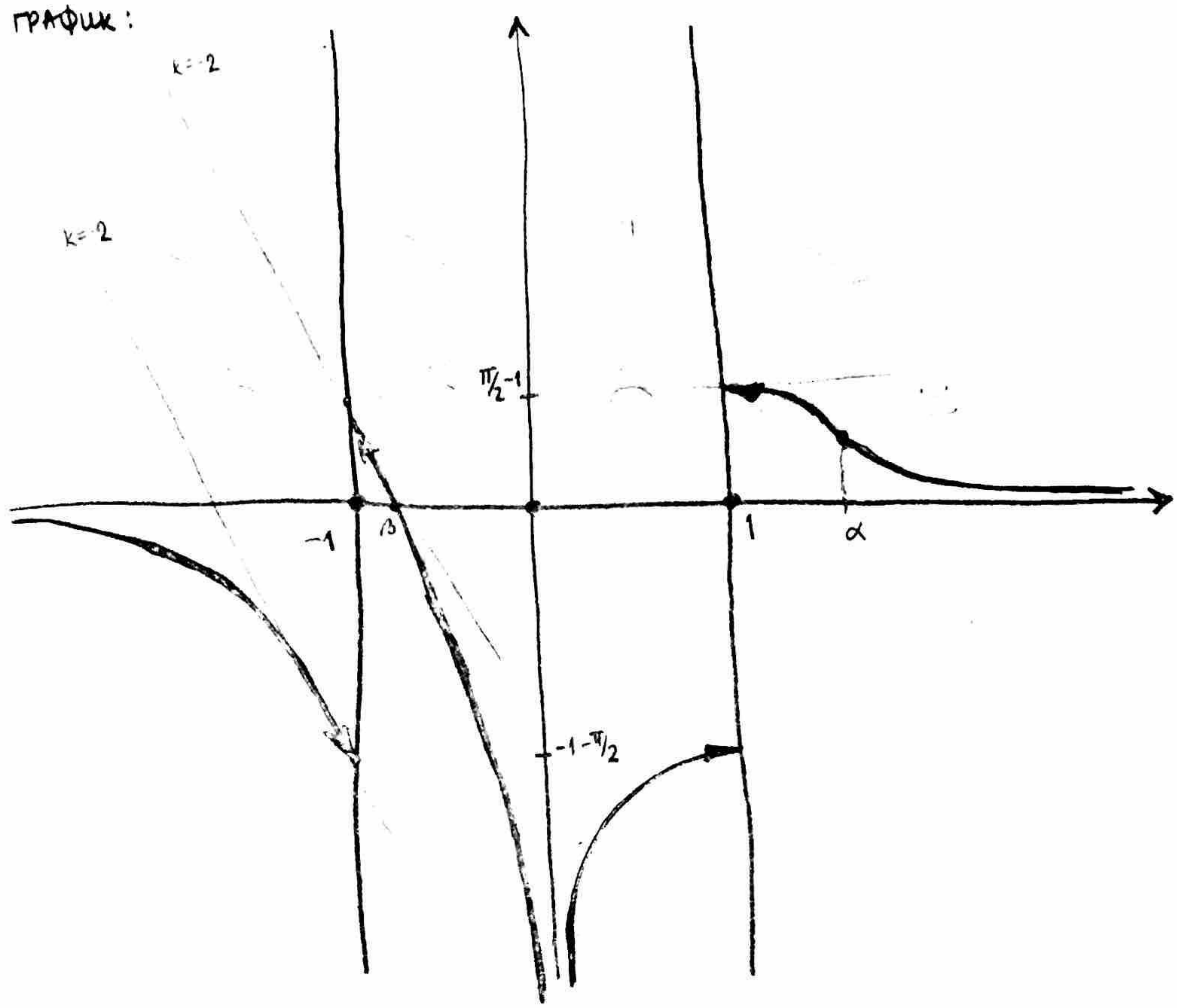
$x\in(-1,0)$ - мења знак јер $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$ - и то тачно 1x јер ↘

$\Rightarrow \exists$ нула $\beta\in(-1,0)$

$f(x)>0$ за $x\in(-1,\beta)$; $f(x)<0$, за $x\in(\beta,0)$

$$\left.\begin{aligned}&x\in(0,1)\to f(x)<0\\ &x\in(1,+\infty)\to f(x)>0\end{aligned}\right\}\ \text{због асимптотике и монотоности...}$$

7 ГРАФИК:



ДОДАТАК: тангента у -2:

$$k = f'(-2) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{-5-8}{20} = \frac{-13}{20} \qquad \boxed{k = -\frac{13}{20}}$$

$$y = kx + n$$

$$y = -\frac{13}{20}x + n$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2, f(-2)) \in t \Rightarrow f(-2) = -\frac{13}{20}(-2) + n = \frac{13}{10} + n \\ f(-2) = -\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{-4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow n = -\frac{1}{2} - \frac{13}{10} + \operatorname{arctg}\frac{-4}{3}$$

$$\boxed{n = \frac{-17}{10} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$$

$\Rightarrow$ тангента је права $\boxed{y = -\frac{13}{20}x + \frac{-17}{10} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$