• $f(x) = (x+2)\,e^{1/x}$

1° $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2° пар./неп. - ништа

3° $x=-2$ - нула

знак: $-$ $\underset{-2}{\bullet}$ $+$ $\underset{0}{\times}$ $+$

4° Асимптотика:

0_+: $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = +\infty \Rightarrow \boxed{\text{В.А. } x=0}$

0_-: $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} \underbrace{(x+2)}_{\to 2}\, \underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{\frac{1}{x}}}}_{\to 0} = 0$ $\xrightarrow{\quad} \underset{0}{\circ}$ – после ћемо видети под којим углом !! ☺

$+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ нема х.а.

Делује да се понаша као права $ax+b$, и да је $a=1$

али да одредимо b као $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax$ није лако баш јер имамо $e^{1/x}$

Зато развијамо !

$x \to \pm\infty$:

$$f(x) = (x+2)\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$= x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+2+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{x+3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{y = x+3 \ \text{ К.А. } x\to\pm\infty}$

$x\to+\infty$ f изнад, $x\to-\infty$ f испод

5° $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^2}(x^2-x-2) = \frac{e^{1/x}}{x^2}(x-2)(x+1)$, $x \neq 0$

f': $+$ $\underset{-1}{\bullet}$ $-$ $\underset{0}{\times}$ $-$ $\underset{2}{\bullet}$ $+$

f: ↗ ↘ ↘ ↗

$2 \to \min$ $f(2) = 4e^{1/2}$

$-1 \to \max$ $f(-1) = \frac{1}{e}$

Како улази у нулу слева?

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{e^{1/x}}{x^2}\underbrace{(x-2)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 1} \overset{(1/x=t)}{=} (-2)\cdot\lim_{t\to-\infty} e^t\cdot t^2 \underset{(y=-t)}{=} (-2)\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y} = 0_-$$

лоп. или $y^2 \ll e^y$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{улази у нулу хоризонтално}}$

6° $$f''(x) = e^{1/x}\cdot\frac{((x-2)+(x+1))\cdot x^2-(x-2)(x+1)\cdot 2x}{x^4} + \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^4}\cdot\left((2x-1)\cdot x^2 - \underbrace{(x-2)(x+1)}_{x^2-x-2}(2x+1)\right) = \frac{e^{1/x}}{x^4}\left(\cancel{2x^3}-x^2-\cancel{2x^3}-x^2+2x^2+x+4x+2\right)$$

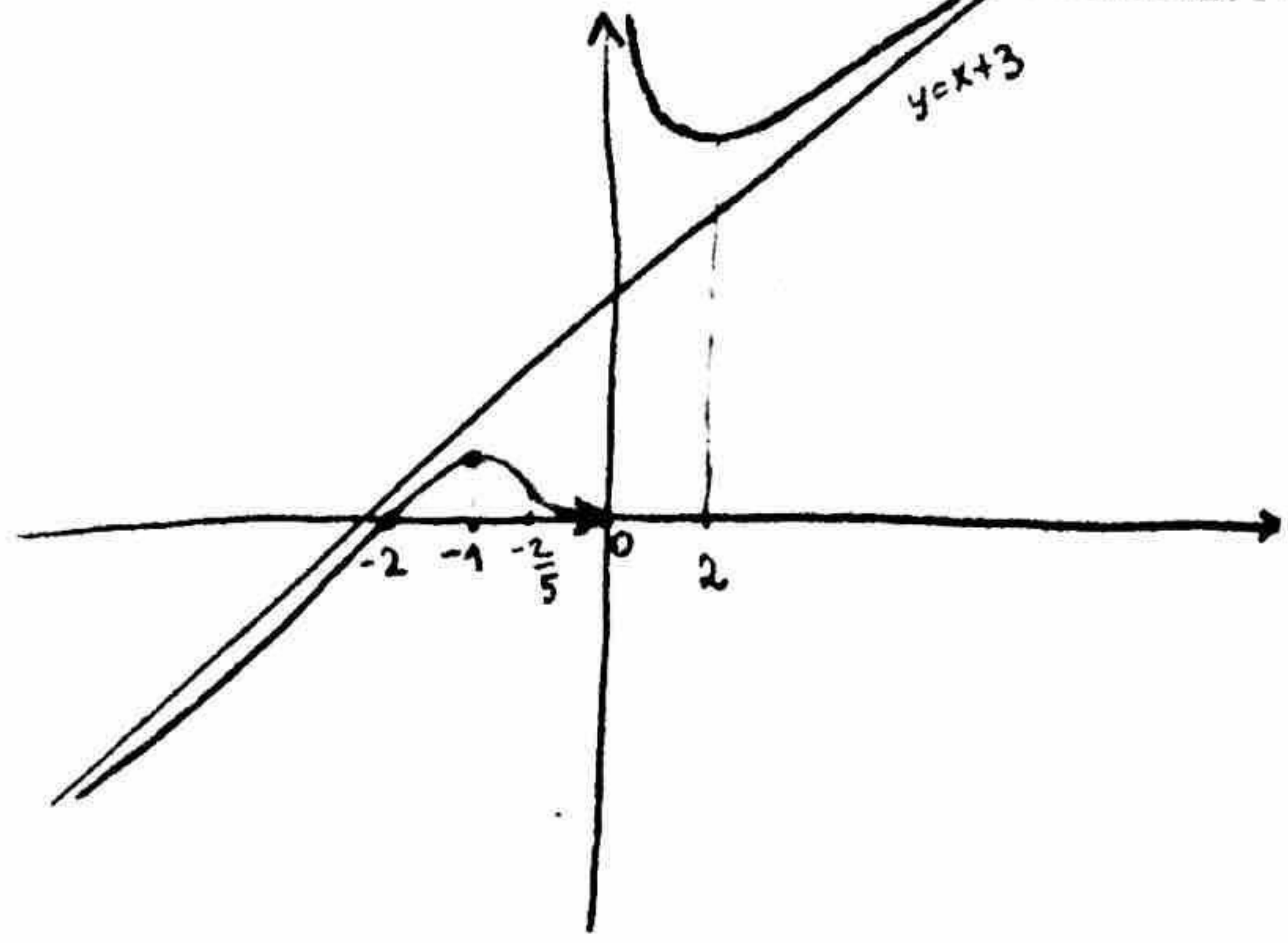
$$= \frac{e^{1/x}}{x^4}\cdot(5x+2),\quad x\neq 0$$

$-$ $\underset{-2/5}{\bullet}$ $+$ $\underset{0}{\times}$ $+$

☹ ☺ ☺

$-2/5$ - превој

7° Γ_f:



• $f(x)=\sqrt{x(x+2)}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

(1°) $D_f=(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$ - има рупу $(-2,0]$ ☺

$-2 \qquad 0$

(2°) //

(3°) нуле: $x=-2$

знак: $f(x)>0,\ \forall x\in D_f\setminus\{-2\}$

(4°) Асимптотско понашање:

• $\lim\limits_{x\to0_+} f(x)=\lim\limits_{x\to0_+}\underbrace{\sqrt{x}}_{\to0}\cdot\underbrace{\sqrt{x+2}}_{\to2}\,\underbrace{e^{1/x}}_{\to+\infty}=2\lim\limits_{x\to0_+}x^{1/2}e^{1/x}\underset{(t=1/x)}{=}2\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{\sqrt t}\overset{\text{лоп. или} \ll}{=}+\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=0 \text{ је В.А.}}$

• $\lim\limits_{x\to-2_-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2_-}\sqrt{\underbrace{x}_{\to-2}\underbrace{(x+2)}_{\to0_-}}\;e^{(1/x)\to-\frac12}=0$

$\Rightarrow$ забада се у 0, видећемо касније под којим углом ☺

• $x\to\pm\infty$ - делује као права ☺ узимамо развој:

$f(x)=\sqrt{x(x+2)}\,e^{1/x}=\sqrt{x^2(1+2/x)}\,e^{1/x}$

$=|x|\cdot(1+2/x)^{1/2}\cdot e^{1/x}$, $x\to\pm\infty$

$=|x|\cdot\left(1+\frac12\cdot\frac2x+\underbrace{\frac{\frac12\cdot(-\frac12)}{2\cdot1}}_{-\frac18}\cdot\frac{4}{x^2}+o\left(\frac1{x^2}\right)\right)\left(1+\frac1x+\frac1{2x^2}+o\left(\frac1{x^2}\right)\right)$

$=|x|\cdot\left(1+\frac2x+\frac1{x^2}+\cancel{\frac1{2x^2}}-\cancel{\frac12\cdot\frac1{x^2}}+o\left(\frac1{x^2}\right)\right)$

$=|x|\cdot\left(1+\frac2x+\frac1{x^2}+o\left(\frac1{x^2}\right)\right)$

$=\begin{cases}x+2+\frac1x+o\left(\frac1x\right), & x\to+\infty\\ -x-2-\frac1x+o\left(\frac1x\right), & x\to-\infty\end{cases}$

$y=x+2$ к.А. $x\to+\infty$, f изнад

$y=-x-2$ к.А. $x\to-\infty$, f изнад

(5°) $f'(x)=\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\overbrace{(2x+2)}^{x+1}\cdot e^{1/x}+\sqrt{x(x+2)}\cdot e^{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}$, $x\neq-2,0$, $x\in D_f$

тј. $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$=e^{1/x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\left[(x+1)-\underbrace{\frac{x(x+2)}{x^2}}_{=1+2/x}\right]$

$=e^{1/x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\left[x+\cancel{1}-\cancel{1}-2/x\right]=e^{1/x}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}}_{>0}\cdot\frac{x^2-2}{x}$ $\to>0$, $x\in(-\infty,-\sqrt2)\cup(\sqrt2,+\infty)$

	$(-\infty,-2)$	-2 … $-\sqrt2$ … 0	$(0,\sqrt2)$	$(\sqrt2,+\infty)$
f':	$-$		$-$	$+$
f:	↘		↘	↗

$\sqrt2$ - лок. мин

и нај.

Како улази у -2 ?

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -2^-} \underbrace{e^{1/x}}_{\to e^{-1/2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{x^2-2}{x}}_{\to -2} = -\infty \Rightarrow$$

верт. се лепи

6° $f''(x) = \left(e^{1/x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \frac{x^2-2}{x}\right)'$ $\qquad (f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$

$$= e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \frac{x^2-2}{x} + e^{1/x} \cdot \frac{-1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{(x(x+2))^{3/2}} \cdot \overset{x+1}{(\cancel{2x+2})} \cdot \frac{x^2-2}{x}$$

$$+ e^{1/x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{e^{1/x}}{\sqrt{\dots}} \cdot \left(\frac{2-x^2}{x^3} + \frac{(x+1)(2-x^2)}{x \cdot x \cdot (x+2)} + \frac{x^2+2}{x^2} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{1/x}}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \frac{1}{x^3(x+2)}}_{A} \cdot \left[(2-x^2)(x+2) + (x+1)(2-x^2) \cdot x + (x^2+2) \cdot x(x+2) \right]$$

$$= A \cdot \left[2x + 4 - x^3 - 2x^2 + 2x^2 - x^4 + 2x - x^3 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x \right]$$

$$= A \cdot \left[2x + 4 + 2x + 2x^2 + 4x \right] = A \cdot \left[2x^2 + 8x + 4 \right]$$

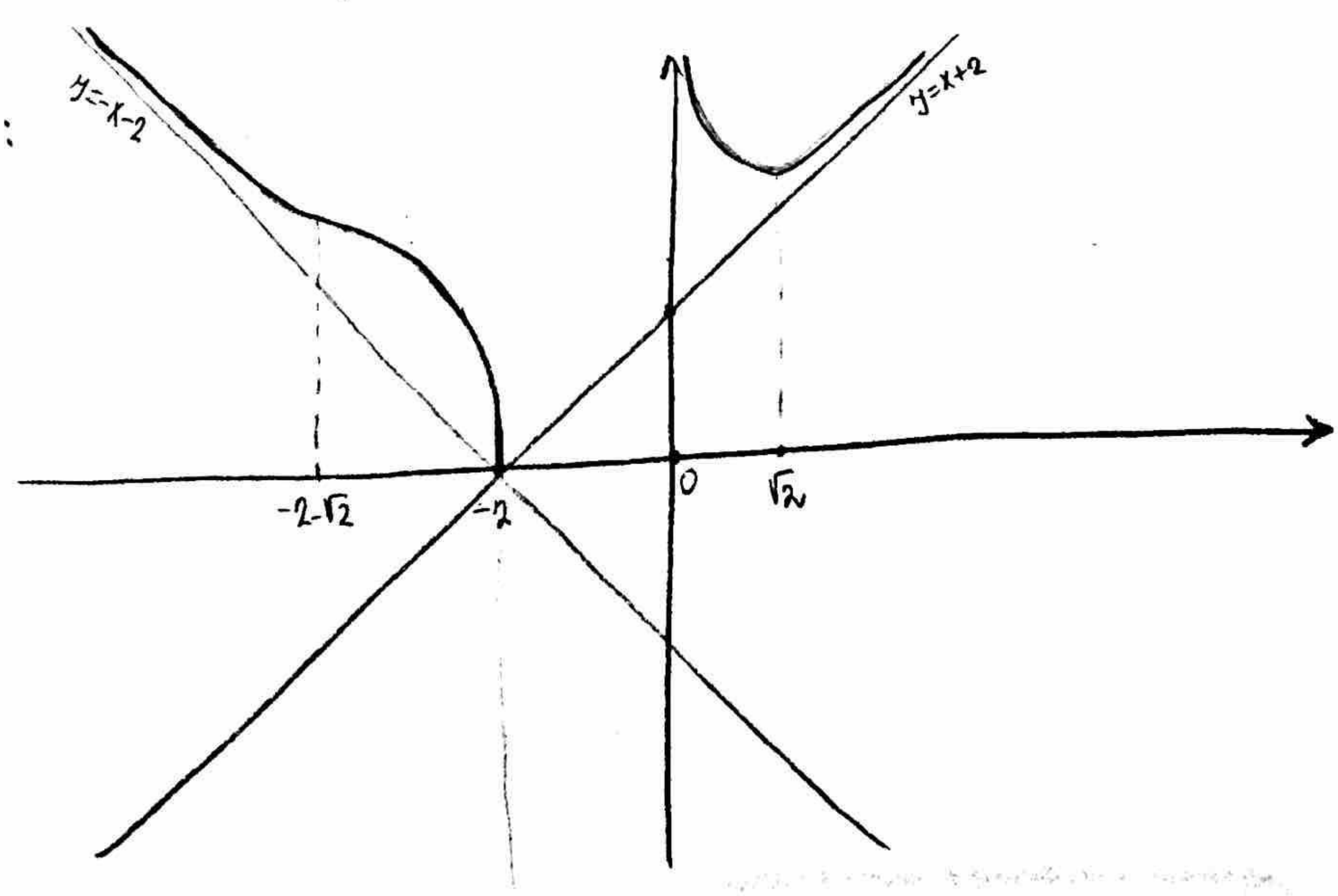
$$= \frac{2 e^{1/x}}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \frac{x^2+4x+2}{x^3(x+2)} \quad , \quad x \in D_f \setminus \{-2\}$$

$x^2+4x+2: \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$

	$-2-\sqrt{2}$		-2	$-2+\sqrt{2}$	0	
x^2+4x+2:	+	−				+
x^3:	−	−				+
$x+2$:	−	−				+
f'':	+	−				+
f:	⌣	⌢				⌣

$d = -2-\sqrt{2}$ превојна т. !

7° Γ_f:



• $f(x) = |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \begin{cases} (x+2)e^{-1/x}, & x \geq -2, x \neq 0 \\ -(x+2)e^{-1/x}, & x < -2 \end{cases}$

1° $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2° //

3° $f(x) \geq 0, \ \forall x \in D_f \qquad f(x) = 0 \iff x = -2$

4° АСИМПТОТИКА:

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} 2 \cdot e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to -\infty}} = 0$ ⇒ забада се здесна

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} 2 \cdot e^{\overbrace{-\frac{1}{x}}^{\to +\infty}} = +\infty$ ⇒ $\boxed{\text{В.А. } x = 0 \text{ слева}}$

$x \to +\infty$: $f(x) = (x+2)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - 1 + \frac{1}{2x} + 2 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{\text{К.А. } y = x+1, \ x \to +\infty}$ Гf испод ње

$x \to -\infty$: $f(x) = -$претх. $= -x - 1 + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{1}{x}}_{<0} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{\text{К.А. } y = -x-1, \ x \to -\infty}$ Гf испод ње

5° $x > -2$: $f'(x) = e^{-1/x} + (x+2)e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} \frac{x^2+x+2}{x^2}$, за <-2 само супротно:

≠!, $x \neq 0$

$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x} \cdot \frac{x^2+x+2}{x^2}, & x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty) \\ -e^{-1/x} \underbrace{\frac{x^2+x+2}{x^2}}_{>0 \text{ увек}}, & x \in (-\infty, -2) \end{cases}$

f': − (−2) + (0) +

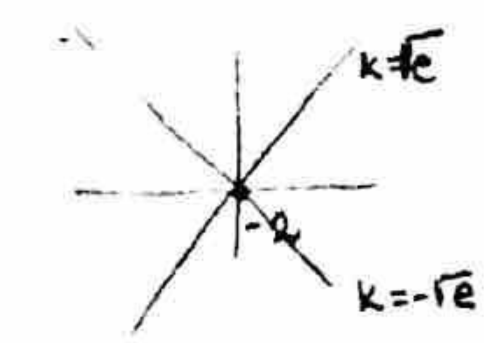
f: ↘ ↗ ↗

−2 min

Да ли је диференцијабилна у −2?

$\lim\limits_{x\to -2_-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -2_-} -e^{-1/x} \frac{x^2+x+2}{x^2} = -\sqrt{e}$

$\lim\limits_{x\to -2_+} f'(x) = \sqrt{e}$ ⇒ није!



У нули није ни дефинисана !!

$\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} e^{\overbrace{-1/x}^{\to -\infty}} \frac{\overbrace{x^2+x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x^2}_{\to 0_+}} \overset{t = 1/x}{=} 2 \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$ ⇒

6° $\underset{x>-2,\, x\neq 0}{f''(x)} = e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{x^2+x+2}{x^2} + e^{-1/x} \cdot \frac{(2x+1)x^2 - (x^2+x+2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(\cancel{x^2}+x+2+x^2-\cancel{2x^2}-4x\right) = \frac{e^{-1/x}(2-3x)}{x^4}$

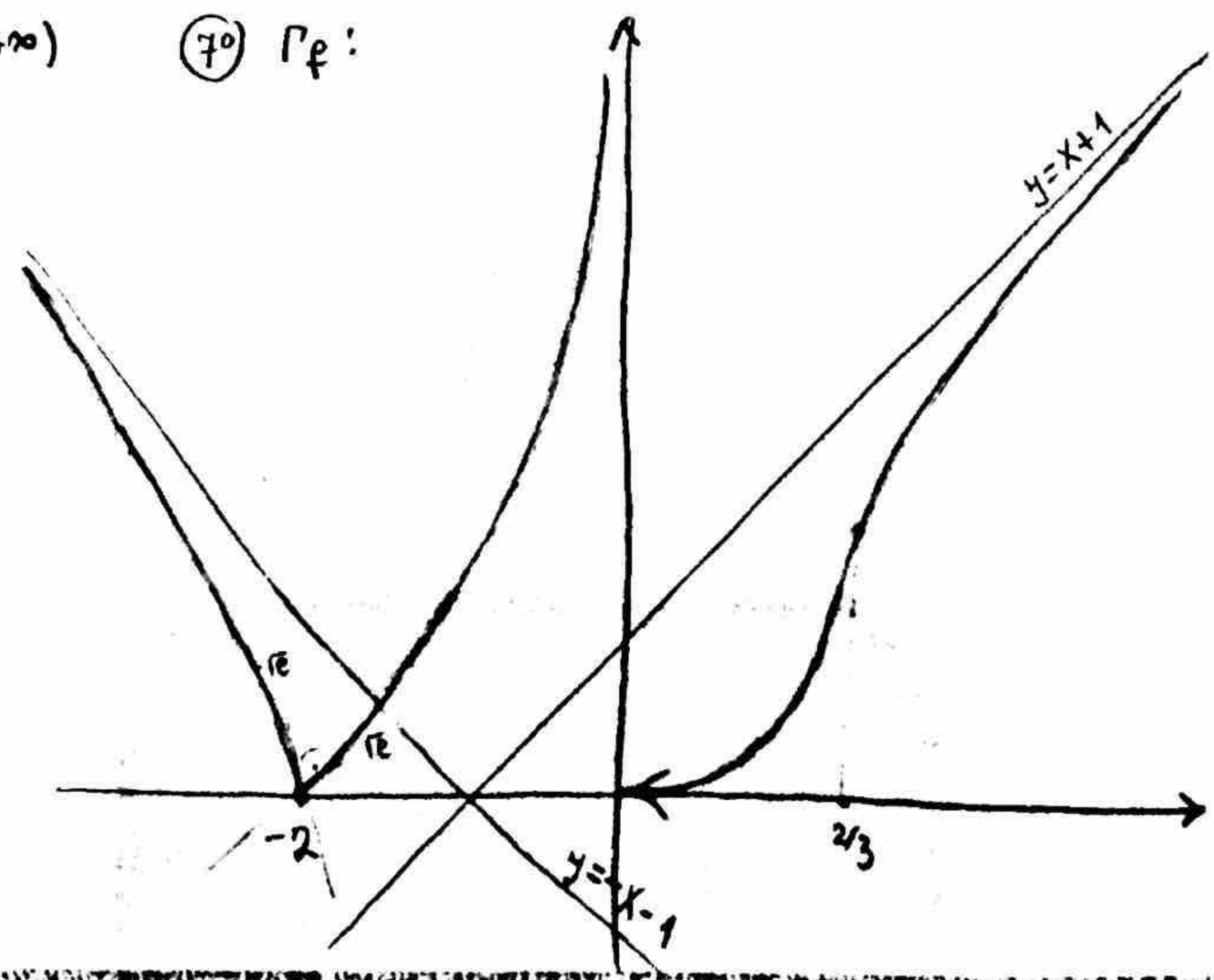
⇒ $f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}(2-3x), & x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty) \\ \frac{e^{-1/x}}{x^4}(3x-2), & x \in (-\infty, -2) \end{cases}$

f'': − (−2) + (0) + (2/3) −

f: ⌢ ⌣ ⌣ ⌢

превојна тачка

7° Гf:



• $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$

а) Приказати у облику $ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x\to\pm\infty$

б) испитати ф-ју.

а) $f(x)=x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3} = x\cdot\left(1+\frac13\cdot\frac{2}{x}+\frac{\frac13\cdot\frac{-2}{3}}{2\cdot 1}\cdot\frac{4}{x^2}+\frac{\frac13\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-5}{3}}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{8}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$= x+\frac23-\frac49\cdot\frac1x+\frac{40}{81}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

б) 1° $D_f=\mathbb{R}$

2° парна/непарна - није!

3° нуле: $x=-2$, $x=0$

$f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+2)}$

$-$ -2 $+$

4° асимптоте:

$x\to+\infty$ из а): к.а. $y=x+2/3$ $y+\infty$ f испод ($-\frac49\frac1x$ у одн. на праву)

$x\to-\infty$: из а): к.а. $y=x+2/3$ $y-\infty$ f = права $\underbrace{-\frac49\frac1x}_{>0}+o\left(\frac1x\right)$ => f изнад

5° $f'(x)=\frac13\cdot\frac{3x^2+4x}{(x^3+2x^2)^{2/3}} = \frac{3x\cdot(x+4/3)}{\underbrace{3(x^3+2x^2)^{2/3}}_{>0}}$, $x\neq 0,-2$ ← обавезно $f'_\pm(0)$ $f'_\pm(-2)$ на другој страни јер нека места

f': $+$ -2 $+$ $-4/3$ $-$ 0 $+$

f: ↗ ↗ ↘ ↗

у 0 - лок. min

у $-4/3$ - лок. max

6° $f''(x)=\frac13\cdot\frac{1}{(x^3+2x^2)^{4/3}}\cdot\left((6x+4)\cdot(x^3+2x^2)^{2/3}-(3x^2+4x)\cdot\frac23\cdot(x^3+2x^2)^{-1/3}\cdot(3x^2+4x)\right)$

$=\frac13\cdot\frac{1}{(x^3+2x^2)^{5/3}}\cdot\left((6x+4)(x^3+2x^2)-\frac23\cdot(3x^2+4x)^2\right)$

$=\frac19\cdot\frac{1}{(x^3+2x^2)^{5/3}}\left(\cancel{18x^4}+36x^3+12x^3+24x^2-\cancel{18x^4}-32x^2-48x^3\right)=$

$=-\frac89\cdot\frac{x^2}{x^{\frac{10}{3}}\cdot(x+2)^{5/3}} = -\frac89\cdot\frac{1}{\underbrace{x^{4/3}}_{>0}\cdot(x+2)^{5/3}}$, $x\neq 0,-2$

$+$ -2 $-$ 0 $-$

превојна ?

• да ли може у т. у којој није деф. да се таже да је превојна??

заправо како се деф превојна т.